

Rozpravy
Československé
akademie
věd

Bareš

1 9 6 2

SEŠIT 4

ROČNÍK 72

Richard Bareš a Pavel Machan

Přesný výpočet
tvarově ortotropních desek

Řada technických věd

NAKLADATELSTVÍ ČESKOSLOVENSKÉ AKADEMIE VĚD

ROZPRÁVY ČESKOSLOVENSKÉ AKADEMIE VĚD

Řada technických věd

Ročník 72 — Sešit 4

RICHARD BAREŠ A PAVEL MACHAN

PŘESNÝ VÝPOČET
TVAROVĚ ORTOTROPNÍCH DESEK

NAKLADATELSTVÍ ČESKOSLOVENSKÉ AKADEMIE VĚD

Praha 1962

Došlo 20. února 1961

Recenzenti

prof. inž. dr. Jaroslav Šlechta,
doc. inž. dr. Ladislav Nováček

I. ÚVOD

Při dnešním překotném technickém rozvoji se stále více projevuje snaha o lepší využití jednotlivých prvků, o celkovou hospodárnost stavebního díla. To vyžaduje dokonalou znalost statického působení konstrukce jako celku. Přitom však konstruktér musí dostat metodu řešení jednoduchou, přehlednou jak v logickém postupu, tak i v početním použití, která umožňuje na nejvyšší možnou míru využití prvků, a to při zachování bezpečnosti díla.

Jednou z důležitých otázek prostorového chování je příčné roznášení zatížení v plošných mostních, stropních či střešních a v poslední době stále častěji panelových stavebních konstrukcích. Příčným roznášením zatížení rozumí se účinnost příčného spojení hlavních nosných prvků. Čím dokonalejší je příčné spojení, tím větší je příčné roznášení nebo příčné spolupůsobení, nebo jinak řečeno, tím menší procento z celového zatížení přebírá přímo zatížený prvek. Typickou ukázkou, kde se vědomě konstrukce příčně aktivisuje, jsou trémové rošty, tj. soustavy trámů, většinou rovnoběžných, různých směrů, v místech křížení spojených. Rošty jsou také jedinou konstrukcí příčně roznášející zatížení, které stojí po desítky let v popředí zájmu mnoha autorů. Bylo vypracováno mnoho metod výpočtu a uveřejněna řada příspěvků k teorii řešení, z nichž jen některé byly dovedeny ke konci — k možnosti praktického použití. Avšak i u konstrukcí, u nichž není záměrně zajišťováno příčné roznášení (ale které jsou z konstrukčních, provozních nebo jiných důvodů uspořádány tak, že hlavní nosné prvky jsou více nebo méně účinně spojeny), dosahuje se tak překvapujících hodnot příčného spolupůsobení, že při hospodárném návrhu jich nelze nedbat. Stejně tomu je u prvků plošných, kde z důvodů stabilitních je deska vyztužena jednou nebo dvěma soustavami trámů.

Doposud všechny známé metody výpočtu konstrukcí, tvořených dvěma soustavami trámů pevně spojených s deskou, buď nedbají roznášečího účinku desky vůbec, nebo prostě předpokládají, že deska pomáhá příčnicům v příčném roznášení zatížení pouze svou ohybovou tuhostí, popřípadě tuhostí v kroucení. Takový předpoklad by však byl správný pouze tehdy, kdyby vzdálenost trámů byla buď větší, nebo alespoň stejná jako spolupůsobící šířka desky v podélném ohybu. Jestliže jsou trámy v menších vzdálenostech, potom se bez ohledu na ohybovou tuhost a tuhost desky v kroucení

mohou jejím prostřednictvím přenášet vodorovné smykové síly z jednoho nosníku do druhého. Ke známým účinkům roznášení zatížení tuhosti v ohybu a v kroucení přistupuje tedy ještě účinek roznášení zatížení smykovou tuhostí desky. Tento účinek budeme nazývat „stěnovým účinkem“ desky oproti účinkům ostatním (tuhosti v ohybu a v kroucení), které budeme označovat jako „deskový účinek“.

2. DOSAVADNÍ ZPŮSOBY VÝPOČTU

Jedním z dosud nejpřesnějších způsobů výpočtu trémových konstrukcí spojených deskou jsou metody používající aplikace anizotropní, obvykle ortogonálně anizotropní desky.

Guyon odvodil na tomto základě řešení [1, 2], vyjadřující spolupůsobení jednotlivých prvků ve tvaru součinitelů příčného roznášení. Zanedbal při tom v parciální diferenciální rovnici ortotropní desky smíšený člen vyjadřující kroucení a pro praktické použití zavedl součinitel příčného roznášení K , kterým nazval poměr vertikálního posunutí (průhybu) bodu desky účinkem zatížení $p(x)$ k průhybu účinkem zatížení p , které bude rovnoměrně rozděleno po celé šířce desky.

Guyon použil řešení redukované rovnice ortotropní desky

$$q_T \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + q_P \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y)$$

na tvaru funkce

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \frac{m\pi x}{l},$$

která již vyhovuje okrajovým podmínkám podél uložených okrajů. Funkci $Y_n(y)$ je pak nutno volit tak, aby bylo vyhověno podporovým podmínkám podél volných okrajů. Jako hlavní charakteristiku konstrukce zavedl pro řešení bezrozměrný parametr příčného ztužení

$$\vartheta = \frac{b}{l^4} \sqrt{\frac{q_T}{q_P}}.$$

Massonnet rozšířil Guyonovu metodu [3, 4] zavedením smíšeného členu rovnice ortotropní desky do počtu, postupoval však při řešení rovnice odlišným způsobem. Vycházel z řady Lévyho

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{m\pi x}{l}$$

a požadoval, aby $Y_m(y)$ vyhověla diferenciální rovnici nezatíženého mostu. Charakteristická rovnice je bikvadratická a vycházejí z ní kořeny

$$r_{1,2,3,4} = \pm m\omega \sqrt{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}},$$

kde α je součinitel tuhosti v kroucení, jak bude později definován, a

$$\omega = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{q_T}{q_P}}.$$

Poněvadž $\alpha < 1$, jsou tyto čtyři kořeny imaginární. Použijeme-li známého algebraického vzorce

$$\sqrt{\alpha \pm i\beta} = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} \pm i \sqrt{\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}},$$

můžeme kořeny psát v komplexním tvaru

$$r_{1,2,3,4} = \pm m\omega \left(\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} + i \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \right).$$

Po úpravě vychází hlavní integrál homogenní rovnice

$$Y_m = e^{mny} \left[A_m \cos(mty) + \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \sin(mty) \right] + e^{-mny} \left[C_m \cos(mty) + \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \sin(mty) \right],$$

kde

$$n = \omega \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \quad \text{a} \quad t = \omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

V další fázi hledal Massonet partikulární řešení pro nekonečně široký most, podpořený na stranách $x = 0$ a $x = l$ prostě, zatížený přímkovým zatížením ve tvaru

$$p = p_m \sin \frac{m\pi x}{l}$$

v ose X , nebo rovnoběžně s ní (obr. 1).

Uvažoval dále část desky, která odpovídá kladným y (je-li osa X uprostřed šířky) a dbal, aby průhyb w a jeho derivace se anulovaly ve velkých vzdálenostech od zatížení. Předchozí rovnice se redukuje proto na

$$Y_m = e^{-mny} \left[\bar{C}_m \cos(mty) + \frac{\bar{D}_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \sin(mty) \right] \quad (y \geq 0),$$

z čehož průhybová funkce je

$$w_1 = e^{-mny} \left[\bar{C}_m \cos(mty) + \frac{\bar{D}_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \sin(mty) \right] \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Ze symetrie plyne, že

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0,$$

z čehož dostaneme

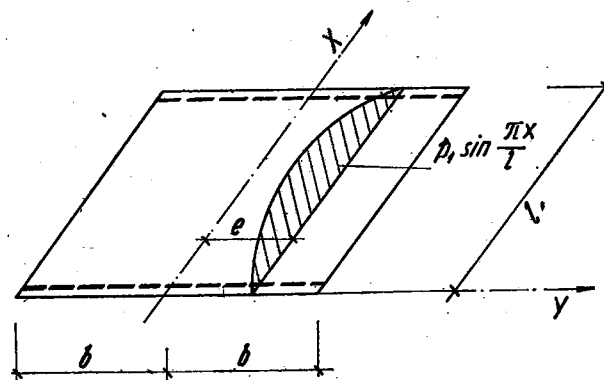
$$\bar{D}_m = \bar{C}_m \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}.$$

Druhou konstantu dostaneme, vyjádříme-li posouvající sílu T_y podél osy X :

$$T_y = -\frac{p_m}{2} \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Vyjádřením posouvající síly jako funkce průhybu w a srovnáním plyne po úpravě

$$\bar{C}_m = \frac{p_m}{2\sqrt{2(1+\alpha)} \rho_P m^3 \omega^3}.$$



Obr. 1.

Působí-li zatížení rovnoběžně s osou X ve vzdálenosti $e < y$, plyne ze symetrie, že musíme nahradit ve vzorci pro w_1 hodnotu y výrazem

$$(y - e) = |y - e|.$$

Tak se konečně dojde k rovnici

$$w_1(y) = \bar{C}_m e^{-mn|y-e|} \sin \frac{m\pi x}{l} \left[\cos(mt|y-e|) + \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \sin(mt|y-e|) \right], \quad (y \geq e).$$

Pro most o konečné šířce $2b$, zatížený přímkovým zatížením tvaru

$$p = p_m \sin \frac{m\pi x}{l}$$

na vzdálenost e od osy X a k ní rovnoběžným, dostaneme řešení superpozicí předchozích dvou

$$w = w_0 + w_1(y),$$

tj.

$$w = \sin \frac{m\pi x}{l} \left\{ e^{mny} \left[A_m \cos mty + \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \sin mty \right] + e^{-mny} \left[C_m \cos mty - \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \sin mty \right] + C_m e^{-m|y-e|} \left[\cos m|y-e| + \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \sin m|y-e| \right] \right\}. \quad (a)$$

Konstanty A_m, B_m, C_m, D_m určí se tak, aby součet obou řešení vyhověl okrajovým podmínkám podél volných okrajů. Tyto jsou $w = 0, \partial^2 w / \partial y^2 = 0$ a podporové reakce

$$R_y = T_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = 0.$$

Při řešení pro jakékoli jiné zatížení je postup zcela obdobný, při čemž např. osamělé břemeno P o souřadnicích $x = c, y = c$ nahradí se Fourierovou řadou

$$p = \frac{2P}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi c}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Jak ukázal Guyon, hodnota parametru příčného ztužení ϑ_m odpovídající zatížení

$$p = p_m \sin \frac{m\pi x}{l}$$

je rovna $m\vartheta$, což znamená, že pro toto zatížení se příčné ztužení chová tak, jako by bylo m -krát ohebnější než při zatížení

$$p = p_1 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Je tedy řešením součet jednotlivých průhybových funkcí pro hodnoty $\vartheta, 2\vartheta, 3\vartheta, \dots$. Výpočet je ovšem velmi složitý.

Stejně jako Guyon i Massonnet upravil prakticky výpočet ve tvaru součinitelů příčného roznášení K při uvažování kroucení, tj. parametru tuhosti v kroucení $\alpha = 1$. Průměrný průhyb w_0 pro plné rovnoměrné zatížení je při tom dán výrazem

$$w_0 = \frac{p_1}{2b\varrho_T} \frac{l^4}{\pi^4} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Tohoto způsobu výpočtu ortotropní desky použil Massonnet dále pro výpočet roštu. Vyšel tedy z rovnice

$$\varrho_T \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \varrho_P \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y), \quad (b)$$

kde pro rošt jsou

$$\varrho_T = EI_T/b_0, \quad \varrho_P = EI_P/l_0, \quad \gamma_T = GJ_T/b_0, \quad \gamma_P = GJ_P/l_0$$

jednotkové tuhosti. Potom jsou postupně momenty

$$M_x = -\varrho_T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad M_y = -\varrho_P \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad M_{xy} = \gamma_T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad M_{yx} = -\gamma_P \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

a svislé posouvající síly

$$Q_x = -\varrho_T \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \gamma_P \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \quad \text{a} \quad Q_y = -\varrho_P \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \gamma_T \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}.$$

Z rovnováhy ve svislém směru plyne

$$\varrho_T \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (\gamma_T + \gamma_P) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \varrho_P \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y). \quad (c)$$

Obecná roštová konstrukce je přechodem mezi ortotropní deskou a roštem se spojitě rozdělenými tuhostmi, a musí tedy řešení pro ni vyhovovat diferenciální rovnici (b) i (c).

Massonnet dále předpokládá, že lze položit Poissonův součinitel μ u železobetonových konstrukcí roven nule. To vede k zanedbání části $(\mu_x \varrho_T + \mu_y \varrho_P)/2$ součinitele H u smíšeného členu v rovnici (b). Potom v obou případech musí součinitel H mít stejnou hodnotu

$$2H = \frac{Gd^3}{3} = \gamma_T + \gamma_P = \frac{G^{\frac{1}{3}} b_T^{\frac{3}{2}} h_T}{b_0} + \frac{G^{\frac{1}{3}} b_P^{\frac{3}{2}} h_P}{l_0}. \quad (d)$$

Pro ulehčení dalších výpočtů položil Massonnet

$$2H = \gamma_T + \gamma_P = 2\alpha \sqrt{\varrho_T \varrho_P} \quad (e)$$

a nazval α součinitelem tuhosti v kroucení. Tímto součinitelem je úplně vyjádřen vliv kroucení roštové konstrukce. Je-li kroucení zanedbáno (Guyon), je α rovno nule, pro izotropní desku je rovno jedné. Pro skutečný most má výraz $\alpha \sqrt{\varrho_T \varrho_P}$ vždy střední hodnotu mezi výrazy odpovídajícími desce bez odporu v kroucení a izotropní desce. Z rovnice (c) také plyne, že pro desku je

$$\gamma = \frac{Gd^3}{6} = \frac{1}{2} \frac{Gd^3}{3} = \frac{1}{2} GJ_D,$$

kde J_D je moment setrvačnosti v kroucení desky podle obvyklých teorií. To znamená, že u konstrukcí, kde existuje skutečná deska, je nutné moment setrvačnosti v kroucení uvažovat poloviční hodnotou, než vychází z obvyklých teorií pro obdélníkový průřez.

Z výrazu (e) plyne

$$\alpha = \frac{\gamma_T + \gamma_P}{2\sqrt{\varrho_T \varrho_P}}.$$

Tento výraz podává přijatelné výsledky pouze v případě čistého roštu bez desky. Je-li k trámům připojena deska, nepopisuje tento součinitel α správně tuhost v kroucení konstrukce. Kromě nahoře uvedené úpravy v hodnotě výrazu pro γ , podle které při výpočtu momentu setrvačnosti v kroucení je nutno zavést díl náležející desce poloviční hodnotou, než vychází pro obdélníkový průřez, musí se ještě zahrnout vliv Poissonovy konstanty, kterou jsme zprvu uvažovali rovnu nule.

Vydeme ze správné hodnoty

$$2H = 2\gamma + \mu(q_D + q_D) = \gamma_T + \gamma_P + 2\mu q_D = 2\alpha\sqrt{q_T q_P}$$

a dostaneme

$$\alpha = \frac{\gamma_T + \gamma_P + 2\mu q_D}{2\sqrt{q_T q_P}},$$

kde

$$q_T = \frac{EI_T}{b_0(1 - \mu^2)}, \quad q_P = \frac{EI_P}{l_0(1 - \mu^2)} \quad \text{a} \quad q_D = \frac{Ed^3}{12},$$

je-li d tloušťka desky. Poněvadž v obvyklých případech pohybuje se α v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, je vliv doplňujícího členu patrný a poněkud zlepšuje výsledky.

Při každém řešení obecného problému bylo by nutné určovat příčinkové čáry příčného roznášení K pro danou hodnotu α z rovnice (a), což by bylo prakticky nevládnutelné. Massonnet použil proto interpolační vzorec [3], jímž je možno určit K_α v závislosti na součinitelích K_0 pro $\alpha = 0$ vypočtených Guyonem [2] a K_1 pro $\alpha = 1$ vypočtených Massonnetem [3, 4]. Tento vzorec zní

$$K_\alpha = K_0 + (K_1 - K_0)\sqrt{\alpha}.$$

Podobně jako pro průhyby lze stanovit roznášecí součinitele pro ohybové a kroucí momenty, popř. posouvající síly.

3. ROZBOR DOSAVADNÍCH METOD VÝPOČTU A POSTAVENÍ PROBLÉMU

Někteří autoři [5, 6, 7] (aby dosáhli shody teoretických výsledků s výsledky zkoušek, které ukazovaly příznivější roznášení než vypočtené na základě teorie ortotropních desek) zavedli jisté efektivní tuhosti v kroucení, odlišné od těch, které plynou z obvyklých metod teorie pružnosti. Podrobným rozbořem zjistíme, že jde při roznášení stěnovým účinkem o podobný druh roznášení jako působením tuhosti příčníků v kroucení, a lze proto přibližně takovýto způsob aproximace použít. Velmi těžko se však stanoví pro různé konstrukce správná efektivní tuhost v kroucení, která je obecně závislá na jiných parametrech než velikost stěnového účinku. I kdyby se nám však podařilo tuto efektivní tuhost v kroucení vystihnout dostatečně přesně, obdrželi bychom pouze shodu se skutečnými průhyby. Shoda v napětí okrajových vláken, zvláště horních, není však tímto způsobem dosažitelná, působí-li relativně velké vodorovné smykové síly, které obvyklou diferenciální rovnicí čtvrtého řádu (b) nemůžeme vystihnout.

Při výpočtu podle této rovnice předpokládáme, že střednicové plochy podélníků a příčníků jsou totožné. V případech, kde nejsou průřezy obou systémů trámů značně rozdílné, lze tohoto předpokladu použít. Jestliže však průřezy obou systémů jsou značně rozdílné, nebo trámy jsou spojeny s deskou, nebude tento předpoklad dodržen, neboť v prvním případě nebudou totožné střednicové plochy obou systémů a ve druhém případě nebude střednicová plocha izotropní desky (skutečné) identická se střednicovou plochou ortotropní desky. Nebude tedy střednicová plocha izotropní desky plochou o nulovém napětí. Rovnicí (b) nezahrnujeme do počtu vliv vodorovných smykových sil.

Ve známé literatuře řešil Gruber [8] ocelový most se spráženou železobetonovou deskou jako „Faltwerk“ a zjistil rozdělovací účinek smykovými silami. Podobnými problémy účinků smyku zabývali se Ebner a Köller při výpočtu letadel [9, 10]. Teprve v roce 1952 upozornil Homberg [11] na důležitost stěnového rozdělovacího účinku. Tento autor rozšířil svou metodu výpočtu [12] o vliv smykové tuhosti desky tím způsobem, že zavedl do výpočtu smykové toky, vznikající na styku desky s příčnými a podélníky, při čemž uvažoval desku jako membránu netuhou v ohybu. Za těchto předpokladů podává řešení, při kterém počet neznámých dosahuje $(4 \cdot \frac{1}{2}n + 3) \cdot (m - 1)$, je-li m podélníků a n příčníků. Také pro konstrukci tvořenou jednou soustavou trámů s deskou podává řešení, ve kterém zanedbává tuhost desky v ohybu. Vhodnou úpravou a za určitých předpokladů v poměru tuhostí jednotlivých nosníků a příčníků lze dosáhnout ortogonalizace neznámých a rozložit původní soustavu převrácených rovnic do $(\frac{1}{2}n + 2)$ nezávislých částí. Toto řešení je velmi složité a nepřehledné a zpřesnění zavedením smykové tuhosti desky ztrácí na významu, není-li současně dbáno ohybové tuhosti desky. (Také s předpokladem, že tuhost v podélním ohybu je dána pouze tuhostí samotných trámů bez desky, nelze souhlasit.) Zkouškami bylo zjištěno, že účinek deskový a stěnový jsou řádově shodné pro obvyklé případy

konstrukcí přicházejících v praxi v úvahu. Jiným způsobem zavedení stěnového účinku desky do počtu podle Hombergá je nahrazení desky příhradovými diagonálami, které leží v její rovině a spojují jednotlivé styčníky. Tento způsob se nezdá být vhodný, neboť jednak nevystihuje správně skutečnost, jednak řešení vzniklé soustavy by bylo prakticky nezvládnutelné.

Velikost příčného roznášení vlivem stěnového účinku je různá podle rozměrových poměrů konstrukce. Bude větší při malé vzdálenosti trámů a u vyšších trámů. Poněvadž vodorovné smykové síly vyvozuji v podélnících kromě ohybového momentu vždy normální síly, je účinek smykové tuhosti desky pro horní a spodní vlákno podélníků různý. V horních vláknech zatíženého trámu nastává tím, že moment i normální síla vyvozuje napětí stejného smyslu, značné odlehčení. Naproti tomu ve spodním pásu, kde ohybový moment a normální síla vlivem stěnového účinku vyvozuji napětí opačného smyslu, nastane jen malé snížení napětí. Při praktickém navrhování trámové konstrukce s deskou nelze přihlížet pouze k příčinkové čáře příčného roznášení, stanovené z průhybů, neboť tato pouze přibližně charakterizuje napětí ve spodních vláknech jednotlivých trámů, ale vůbec nesouhlasí s poměrnými hodnotami napětí v horních vláknech trámů. Trámy jsou namáhány kombinací tlaku a ohybu, což může vést k hospodárnějšímu návrhu průřezu. Přitom smyková napětí v desce, vzhledem k tomu, že se rozdělují na celou délku, jsou malá a není třeba zvláště na ně desku dimenzovat. Bude tedy obvykle vyhovovat průřez desky, navržený na základě ostatních zatížení (např. pro lokální zatížení desky mezi trámy) bez dalších úprav i pro zatížení smykovými silami.

Ortotropní deska, která je tvořena izotropní deskou spojenou s jednou nebo dvěma soustavami trámů, je zpracována pro zatížení působící ve směru roviny desky od Pflügera [13]. Pro trámy netuhé v kroucení podal zajímavý rozbor jednotlivých vlivů Trenks [14]. Podle něj vliv stěnového účinku závisí především na míře excentricity mezi těžišťovou plochou izotropní desky a těžišti trámů. Její vliv je značný, neboť chyba proti obvyklému řešení (se zanedbáním stěnového účinku) se mění přibližně kvadraticky s popsanou excentricitou. Dále závisí na poměru průřezových ploch desky a trámů. V této závislosti se chyba mění přibližně lineárně. Důležitý je také poměr tuhostí v ohybu v obou směrech. Jsou-li trámy pouze v jednom směru, potom tento parametr vyjadřuje poměr tuhosti ortotropní desky ve směru trámů k tuhosti izotropní desky. Největší chyba vzniká (při jakýchkoli hodnotách ostatních dvou parametrů) při minimální hodnotě tohoto poměru. U konstrukcí se dvěma soustavami trámů je směrodatný poměr tuhostí v ohybu v obou směrech. Maximální chyba proti obvyklému řešení vzniká v případě, kdy trámy v jednom směru mají nekonečně malé průřezové rozměry.

Naším úkolem bude řešit konstrukce uvedeného typu s co největší přesností, zvláště pokud jde o volbu předpokladů a zahrnutí jednotlivých vlivů. Jsme si plně vědomi obtížnosti tohoto úkolu jak po stránce matematické, tak vzhledem k možnosti praktické aplikace a nemíníme konstruktéry zatěžovat přesným analytickým řešením diferenciálních rovnic. Abychom obdrželi výsledky ve vhodné úpravě pro praktické po-

užití, tj. ve tvaru grafů nebo tabulek, a abychom objasnili vliv jednotlivých průřezových parametrů na celkové chování konstrukce, zamýšlíme použít k řešení diferenciálního analogového počítače.

Budeme se zabývat čtyřmi systémy trámové konstrukce spojené s deskou, odlišnými podle konstrukčního uspořádání:

1. Konstrukce s výztuhami netuhými v kroucení, probíhajícími v jednom směru.
2. Konstrukce s výztuhami netuhými v kroucení, probíhajícími ve dvou vzájemně kolmých směrech.
3. Konstrukce s výztuhami odporujícími v kroucení, které probíhají pouze v jednom směru.
4. Konstrukce se dvěma osnovami vzájemně kolmých výztuh, z nichž jedna (podélníky) odporuje v kroucení a druhá (příčníky) je netuhá v kroucení.

4. OZNAČENÍ A PŘEDPOKLADY

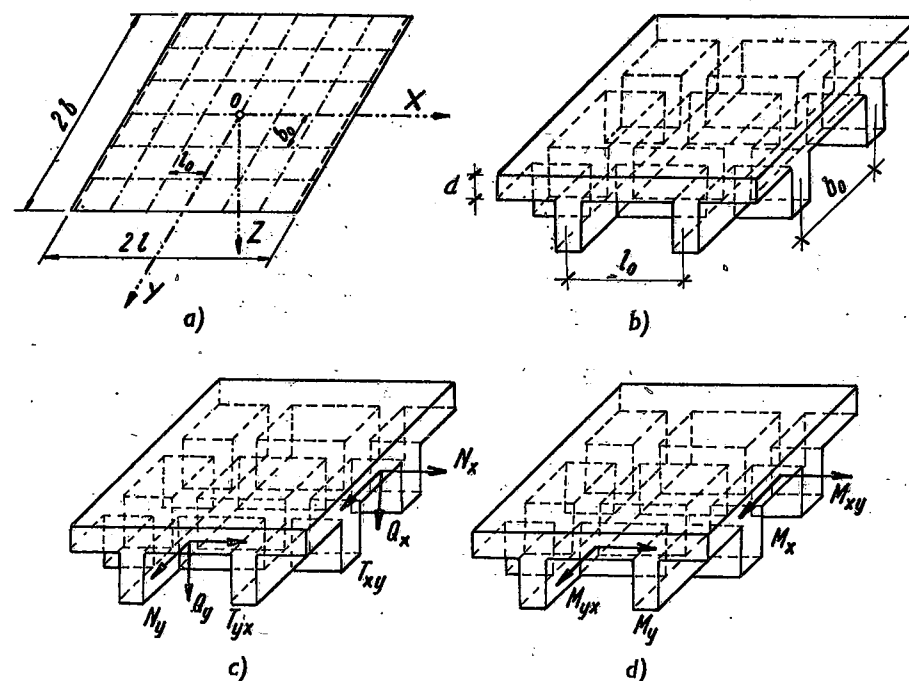
Kromě značek vysvětlených v textu budeme soustavně užívat tohoto označení (obr. 2):

- N_x — normální síla celého profilu ve směru osy X ,
- N_y — normální síla celého profilu ve směru osy Y ,
- σ_x — normální napětí v izotropní desce ve směru osy X ,
- σ_y — normální napětí v izotropní desce ve směru osy Y ,
- σ_x^+ — normální napětí ve výztuze (podélníku), která probíhá směrem osy X ,
- σ_y^+ — normální napětí ve výztuze (příčnící), který probíhá směrem osy Y ,
- τ_{xy} — smykové napětí v izotropní desce,
- T_{xy} — smyková síla celého profilu působící \parallel s osou Y ,
- T_{yx} — smyková síla celého profilu působící \parallel s osou X ,
- M_x — ohybový moment celého profilu v rovině \parallel s rovinou XZ ,
- M_y — ohybový moment celého profilu v rovině \parallel s rovinou YZ ,
- M_{xy} — kroučící moment celého profilu v rovině \parallel s rovinou YZ ,
- M_{yx} — kroučící moment celého profilu v rovině \parallel s rovinou XZ ,
- F_T — průřezová plocha jednoho podélníku,
- F_P — průřezová plocha jednoho příčnící,
- f_T — průřezová plocha podélníků vztažená na jednotku šířky ($f_T = F_T/b_0$),
- f_P — průřezová plocha příčniců vztažená na jednotku délky ($f_P = F_P/l_0$),
- b_0 — vzájemná vzdálenost podélníků,
- l_0 — vzájemná vzdálenost příčniců,
- S_T — statický moment průřezové plochy podélníku vzhledem k střednicové ploše skutečné izotropní desky,
- S_P — statický moment průřezové plochy příčnící vzhledem k střednicové ploše skutečné izotropní desky,
- s_T — statický moment ploch podélníků, vztažený na jednotku šířky ($s_T = S_T/b_0$),
- s_P — statický moment ploch příčniců, vztažený na jednotku délky ($s_P = S_P/l_0$),
- I_T — moment setrvačnosti podélníku vzhledem k střednicové ploše izotropní desky,
- I_P — moment setrvačnosti příčnící vzhledem ke střednicové ploše izotropní desky,
- i_T — moment setrvačnosti podélníků, vztažený na jednotku šířky ($i_T = I_T/b_0$),
- i_P — moment setrvačnosti příčniců, vztažený na jednotku délky ($i_P = I_P/l_0$),
- e_T — ohybová tuhost podélníků, vztažená na jednotku šířky ($e_T = EI_T/b_0$),
- e_P — ohybová tuhost příčniců, vztažená na jednotku délky ($e_P = EI_P/l_0$),
- $2l$ — rozpětí konstrukce ve směru podélníků,
- $2b$ — šířka konstrukce,
- d — tloušťka skutečné izotropní desky.

Soustava souřadných os se předpokládá levotočivá.

Kromě zvláštních omezení, popsanych u jednotlivých systémů, vycházíme z těchto společných předpokladů:

- a) Konstrukce je zhotovena tak, že izotropní deska leží na soustavě trámů (podélníků, resp. příčniců) v každém směru vzájemně rovnoběžných, při čemž je deska s nimi spojena takovým způsobem, že je vyloučeno vzájemné posunutí trámů a desky.
- b) Pro jednoduchost budeme uvažovat, že podélníky mají stejný, po délce konstantní průřez a leží ve stejných vzdálenostech. Totéž bude platit i o příčnicích.



Obr. 2. Osy souřadnic, označení rozměrů a vnitřních sil v uvažované konstrukci.

c) Shodně k teorii tenkých desek použijeme těchto dalších předpokladů:

1. Průhyby konstrukce vzhledem k tloušťce konstrukce jsou malé, a tudíž křivost

$$\frac{1}{r} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

2. Napětí kolmá k rovině desky $\sigma_x, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ jsou zanedbána.
3. Normály ke střednicové ploše izotropní desky zůstanou zachovány i po deformaci soustavy.

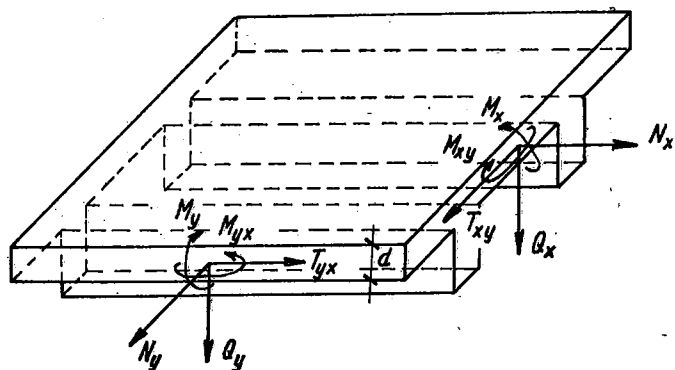
d) Momenty jsou vztaženy ke střednicové ploše izotropní desky, která není neutrální plochou konstrukce a bude mít všechny složky posuvů.

5. KONSTRUKCE S VÝZTUHAMI NETUHÝMI V KROUCENÍ PROBÍHAJÍCÍMI V JEDNOM SMĚRU

K předpokladům uvedeným v předchozí kapitole přistupuje zde ještě další:
Trámy nejsou schopny přenášet kroucení.

5.1. Vnitřní síly

Vytne z konstrukce prvek podle obr. 3 a vyjádříme vnitřní síly pomocí napětí.



Obr. 3. K určení ohybových momentů, smykových a normálních sil v řezech konstrukce s výztuhami netuhými v kroucení, probíhajícími v jednom směru.

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-(d/2)}^{+(d/2)} \sigma_x dz + \frac{1}{b_0} \int_{F_T} \sigma_x^+ dF_T, \\
 N_y &= \int_{-(d/2)}^{+(d/2)} \sigma_y dz, \\
 T_{xy} &= T_{yx} = \int_{-(d/2)}^{+(d/2)} \tau_{xy} dz, \\
 M_x &= \int_{-(d/2)}^{+(d/2)} \sigma_x z dz + \frac{1}{b_0} \int_{F_T} \sigma_x^+ z dF_T, \\
 M_y &= - \int_{-(d/2)}^{+(d/2)} \sigma_y z dz, \\
 M_{xy} &= - M_{yx} = - \int_{-(d/2)}^{+(d/2)} \tau_{xy} z dz.
 \end{aligned} \tag{5.1a-f}$$

Z Hookova zákona pro rovinnou napjatost plynou napětí v izotropní desce

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y), \\
 \sigma_y &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x), \\
 \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma_{xy},
 \end{aligned} \tag{5.2a-c}$$

kde E je Youngův modul a μ Poissonovo číslo. V podélnících bude pouze jednoosá napjatost, vyjádřená vztahem

$$\sigma_x^+ = E \varepsilon_x^+ \tag{5.2d}$$

Pro deformace platí dále známé vztahy

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v_x}{\partial y}, \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial x}, \\
 \varepsilon_x^+ &= \frac{\partial u_x}{\partial x}.
 \end{aligned} \tag{5.3a-d}$$

Vyjádříme-li nyní posuvy u_x a v_x pomocí posuvů u , v střednicové plochy skutečné izotropní desky, obdržíme

$$\begin{aligned}
 u_x &= u - z \frac{\partial w}{\partial x}, \\
 v_x &= v - z \frac{\partial w}{\partial y}, \\
 w_x &= w.
 \end{aligned} \tag{5.4a-c}$$

Sloučením rovnic (5.1) až (5.4) a provedením naznačené integrace dostaneme vnitřní síly ve tvaru:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{Ed}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + E \left(f_T \frac{\partial u}{\partial x} - s_T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\
 N_y &= \frac{Ed}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\
 T_{xy} &= T_{yx} = \frac{Ed}{2(1 + \mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),
 \end{aligned} \tag{5.5a-f}$$

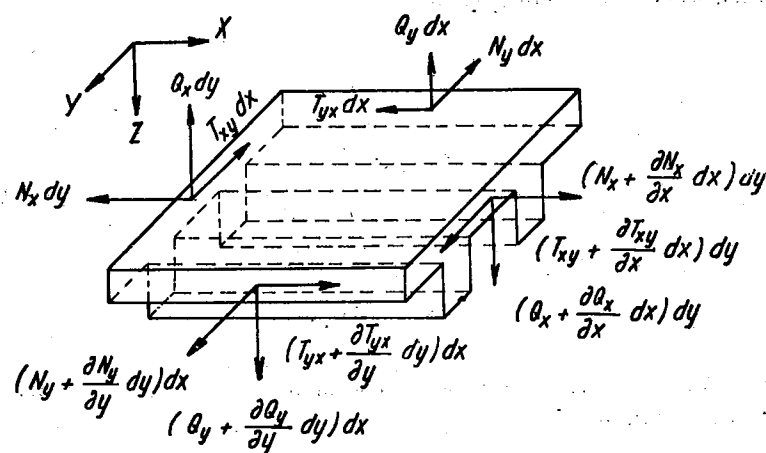
$$M_x = -\frac{Ed^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left(Es_T \frac{\partial u}{\partial x} - Q_T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$M_y = \frac{Ed^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = \frac{Ed^3}{12(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

5.2. Výminky rovnováhy nezatiženého prvku a odvození diferenciálních rovnic

Napišme podle obr. 4 součtové výminky rovnováhy ve směru tří souřadných os



Obr. 4. K odvození součtových výminek rovnováhy elementu konstrukce.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} = 0$$

(5.6a-c)

a dále podle obr. 5 momentové výminky rovnováhy

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0,$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y = 0.$$

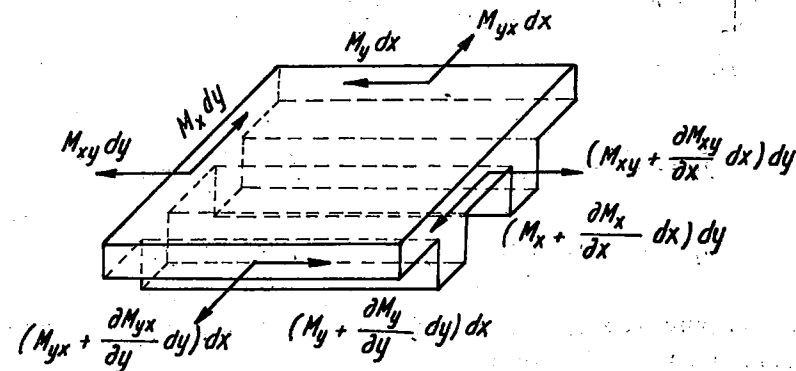
(5.7a-b)

Provedením derivací těchto rovnic a jejich součtem podle rovnice (5.6c) obdržíme

$$-\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (5.8)$$

a po dosazení výrazů pro momenty z rovnice (5.5d-f) vychází po úpravě:

$$-\frac{Ed^3}{12(1-\mu^2)} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] - Q_T \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + Es_T \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (5.9)$$



Obr. 5. K odvození momentových výminek rovnováhy elementu konstrukce.

Obdobně s použitím výrazů pro normální a smykové síly z rovnice (5.5a-c) ze součtových výminek rovnováhy plyne po úpravě

$$\frac{Ed}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{Ed}{2(1-\mu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{Ed}{1-\mu^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad (5.10)$$

$$\frac{Ed}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{Ed}{2(1-\mu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left[\frac{Ed}{1-\mu^2} + Ef_T \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x} - Es_T \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0. \quad (5.11)$$

Soustava těchto tří parciálních diferenciálních rovnic (5.9, 5.10, 5.11) plně popisuje uvažovanou trémovou konstrukci spojenou s deskou.

Po vyloučení členu s u z rovnice (5.9) a jeho nahrazení funkcí w (viz příloha 1) dostaneme diferenciální parciální lineární homogenní rovnici 8. řádu

$$a_1 \frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + a_2 \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial y^2} + a_3 \frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial y^4} + a_4 \frac{\partial^8 w}{\partial x^2 \partial y^6} + a_5 \frac{\partial^8 w}{\partial y^8} = 0, \quad (5.23)$$

kterou je daný problém popsán v závislosti pouze na svislých posuvech (průhybech) konstrukce w .

Součinitelé a_i u jednotlivých členů mají zde tento význam

$$\begin{aligned} a_1 &= d\bar{f}_T \bar{i}_T - ds_T^2, \\ a_2 &= 2 \left[(1 + \mu) \bar{f}_T \bar{f}_P - \frac{\mu d^2}{(1 - \mu)(1 - \mu^2)} \right] \bar{i}_T + 2d\bar{f}_T j - 2(1 + \mu) \bar{f}_P s_T^2, \\ a_3 &= d\bar{f}_P \bar{i}_T + 4 \left[(1 + \mu) \bar{f}_T \bar{f}_P - \frac{\mu d^2}{(1 - \mu)(1 - \mu^2)} \right] j + d\bar{f}_T \bar{i}_P, \quad (5.24a-e) \\ a_4 &= 2 \left[(1 + \mu) \bar{f}_T \bar{f}_P - \frac{\mu d^2}{(1 - \mu)(1 - \mu^2)} \right] \bar{i}_P + 2d\bar{f}_P j, \\ a_5 &= d\bar{f}_P \bar{i}_P, \end{aligned}$$

při čemž

$$\begin{aligned} \bar{f}_T &= \frac{d}{1 - \mu^2} + f_T, & \bar{f}_P &= \frac{d}{1 - \mu^2}, \\ \bar{i}_P &= j = \frac{d^3}{12(1 - \mu^2)}, & \bar{i}_T &= j + i_T, \end{aligned} \quad (5.24f-i)$$

Obdobně posunutí v a u můžeme vyjádřit v závislosti pouze na průhybu w v konečném tvaru. Pro posun v platí rovnice

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^5} = b_1 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + b_2 \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} + b_3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} + b_4 \frac{\partial^6 w}{\partial y^6}, \quad (5.25)$$

kde součinitelé b_i u jednotlivých členů mají význam

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{d_1}{d_n}, & b_2 &= \frac{d_2}{d_n}, \\ b_3 &= \frac{d_3}{d_n}, & b_4 &= \frac{d_4}{d_n}, \end{aligned} \quad (5.26a-d)$$

při čemž

$$\begin{aligned} d_1 &= g_2 ds_T (\bar{f}_T \bar{i}_T - s_T^2), \\ d_2 &= s_T \bar{i}_T (g_1^2 \bar{f}_T \bar{f}_P - g_2^2 d^2) + g_1^2 \bar{f}_P s_T^3 + 2g_2 d \bar{f}_T s_T j, \\ d_3 &= 2s_T j (g_1^2 \bar{f}_T \bar{f}_P - g_2^2 d^2) + g_2 ds_T \bar{f}_T \bar{i}_P, \\ d_4 &= s_T \bar{i}_P (g_1^2 \bar{f}_T \bar{f}_P - g_2^2 d^2), \\ d_n &= g_1 \bar{f}_P s_T^2 \end{aligned} \quad (5.26e-i)$$

a dále

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{2\mu}{(1 - \mu)(1 - \mu^2)}, \\ g_1 &= \frac{1 + \mu}{1 - \mu^2} \end{aligned}$$

Pro posun u platí

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = c_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + c_3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}, \quad (5.27)$$

kde součinitelé c_i u jednotlivých členů mají význam

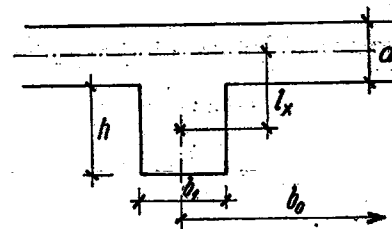
$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{i_T}{s_T}, \\ c_2 &= \frac{2j}{s_T}, \\ c_3 &= \frac{j}{s_T}. \end{aligned} \quad (5.28a-c)$$

5.3. Bezrozměrné parametry η a β

K usnadnění dalších výpočtů zavedeme do součinitelů a_i , b_i a c_i v rovnici (5.23), (5.25) a (5.27) bezrozměrné parametry

$$\eta = \frac{e_x}{d}, \quad (52.9)$$

$$\beta = \frac{b_1}{b_0}, \quad (5.30)$$



Obr. 6. Označení rozměrů příčného průřezu.

označíme-li podle obrázku 6

e_x – vzdálenost těžiště podélníků od těžiště izotropní desky,

d – tloušťka izotropní desky,

b_1 – šířka podélníků,

b_0 – osová vzdálenost podélníků,

h – výška podélníků (bez desky).

Zmenšuje-li se výška trámů k nule, tj. přechází-li se k izotropní desce, blíží se parametr η hodnotě 0,5. Zmenšuje-li se naopak tloušťka desky, roste parametr η nade všechny meze. V praktických případech trámové konstrukce spojené s deskou nepřestoupí však parametr η hodnotu 15.

Je tedy $0,5 \leq \eta \leq N$, kde

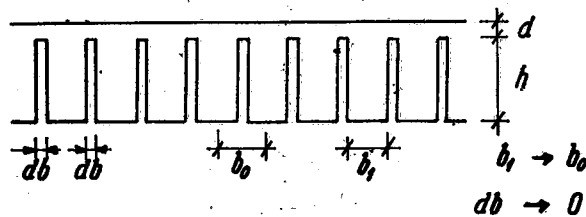
$$\begin{aligned} N_{\text{teor}} &= \infty, \\ N_{\text{prakt}} &= 15. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Zvětšuje-li se šířka podélníků b_1 až k hodnotě jejich osové vzdálenosti b_0 , tj. přechází-li se k jakési modifikované ortotropní desce o tloušťce $(h + d)$, blíží se parametr β hodnotě 1.

Ve skutečnosti jde v tomto případě o deskovou konstrukci, v níž deska v jednom

směru je opatřena zářezy infinitezimální tloušťky do hloubky rovné výšce trámů h (obr. 7).

Při tom není uvažována tuhost průřezů h . b_1 v kroucení, což odporuje skutečnosti pro $b_1 \rightarrow b_0$. Nemůže tedy ve skutečnosti nastat případ takovéto konstrukce.



Obr. 7. Desková konstrukce se zářezy infinitezimální tloušťky jako zvláštní případ uvažované konstrukce při $b_1 \rightarrow b_0$.

Zvětšuje-li se naopak osová vzdálenost podélníků b_0 nade všechny meze, tj. přechází-li se opět k izotropní desce avšak o tloušťce d , blíží se parametr β hodnotě nulové.

Je tedy

$$0 \leq \beta \leq 1 \quad (5.32)$$

pomocí těchto dvou parametrů lze psát

$$h = d(2\eta - 1),$$

$$f_T = \frac{b_1 h}{b_0} = \beta h = \beta d(2\eta - 1),$$

$$i_T = \frac{I_T}{b_0} = \frac{\frac{1}{12} b_1 h^3}{b_0} + \frac{b_1 h e^2}{b_0} = \frac{\beta}{12} d^3 (2\eta - 1)^3 + \beta d^3 \eta^2 (2\eta - 1) \quad (5.33)$$

a

$$s_T = \frac{b_1 h e}{b_0} = \beta d^2 (2\eta - 1) \eta$$

a po dosazení do výrazů (5.24a–e) pro a_i obdržíme

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + \beta(2\eta - 1)^3 (1 - \mu^2) + 12\beta(2\eta - 1) \eta^2 (1 - \mu^2) + \beta(2\eta - 1) \cdot \\ &\quad \cdot (1 - \mu^2) + \beta^2(2\eta - 1)^3 (1 - \mu^2)^2, \\ a_2 &= 4 + 2\beta(1 - \mu^2)(2\eta - 1)^3 + 24\beta\eta^2(1 - \mu^2)(2\eta - 1) + 2\beta(1 + \mu) \cdot \\ &\quad \cdot (2\eta - 1) + 2\beta^2(2\eta - 1)^4 (1 + \mu)(1 - \mu^2) + 2\beta(2\eta - 1)(1 - \mu^2), \\ a_3 &= 6 + \beta(2\eta - 1)^3 (1 - \mu^2) + 12\beta(2\eta - 1) \eta^2 (1 - \mu^2) + 4\beta(2\eta - 1) \cdot \\ &\quad \cdot (1 + \mu) + \beta(2\eta - 1)(1 - \mu^2), \\ a_4 &= 4 + 2\beta(2\eta - 1)(1 + \mu), \\ a_5 &= 1. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Podobně obdržíme po dosazení bezrozměrných parametrů do výrazů (5.26a–d) a (5.28a–c) pro b_i a c_i

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2\mu j}{\beta d^2 (2\eta - 1) \eta (1 + \mu)} + \frac{2\mu(1 - \mu)}{d^2 \eta} j + \frac{2\mu d \left(\frac{(2\eta - 1)^2}{12} + \eta^2 \right)}{(1 + \mu) \eta} + \\ &+ \frac{2\mu(1 - \mu) d \beta \left[\frac{(2\eta - 1)^3}{12} + \eta^2 (2\eta - 1) \right]}{\eta} - 2\mu(1 - \mu) \beta d (2\eta - 1) \eta, \\ b_2 &= \frac{(1 + \mu)(16\eta^2 - 4\eta + 1)}{(1 - \mu) 12\eta} + \frac{\beta d (1 - \mu^2)(32\eta^3 - 24\eta^2 + 4\eta - 1)}{12\eta} - \\ &- \frac{4\mu^2 d \left(\frac{(2\eta - 1)^2}{12} + \eta^2 \right)}{(1 - \mu^2) \eta} - \beta d (2\eta - 1) \eta (1 + \mu)^2 + \\ &+ \frac{4\mu d \left[\frac{1}{1 - \mu^2} + \beta(2\eta - 1) \right]}{(1 + \mu) \beta (2\eta - 1)}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} b_3 &= -\frac{d}{6(1 - \mu^2) \beta (2\eta - 1) \eta} + \frac{(1 + \mu) d}{6(1 + \mu) \eta} - \frac{2\mu^2 d}{(1 - \mu^2) \beta (2\eta - 1) \eta} + \\ &+ \frac{\mu d}{3(1 + \mu)(1 - \mu^2) \beta (2\eta - 1) \eta} + \frac{\mu d}{3(1 + \mu) \eta}, \end{aligned}$$

$$b_4 = \frac{d}{12(1 - \mu^2) \beta (2\eta - 1) \eta} + \frac{(1 + \mu) d}{12(1 - \mu) \eta} - \frac{\mu^2 d}{3(1 - \mu^2)^2 \beta (2\eta - 1) \eta},$$

$$c_1 = \frac{d}{12(1 - \mu^2) \beta (2\eta - 1) \eta} + \frac{d \left(\frac{(2\eta - 1)^2}{12} + \eta^2 \right)}{\eta},$$

$$c_2 = \frac{2d}{12(1 - \mu^2) \beta (2\eta - 1) \mu}, \quad c_3 = \frac{d}{12(1 - \mu^2) \beta (2\eta - 1) \mu}. \quad (5.36)$$

5.4. Mezní případy

Vyšetřením hodnot součinitelů a_i pro čtyři základní limitní případy, kdy

- $\eta \rightarrow 0,5$ (výška žeber $h \rightarrow 0$),
- $\eta \rightarrow \infty$ (tloušťka desky $d \rightarrow 0$),
- $\beta \rightarrow 0$ (vzdálenost žeber $b_0 \rightarrow \infty$),
- $\beta \rightarrow 1$ (vzdálenost žeber $b_0 \rightarrow b_1$),

dostaneme:

- a) $a_1 = 1,$
 $a_2 = 4,$
 $a_3 = 6,$
 $a_4 = 4,$
 $a_5 = 1.$
- b) $a_1 = 16\beta^2(1 - \mu^2)^2,$
 $a_2 = 32\beta^2(1 - \mu^2)(1 + \mu),$
 $a_3 = a_4 = a_5 = 0.$
- c) $a_1 = 1,$
 $a_2 = 4,$
 $a_3 = 6,$
 $a_4 = 4,$
 $a_5 = 1.$
- d) $a_1 = 1 + (1 - \mu^2)(2\eta - 1)^3 + 12(1 - \mu^2)\eta^2(2\eta - 1) + (2\eta - 1)(1 - \mu^2) + (1 - \mu^2)(2\eta - 1)^4,$
 $a_2 = 4 + 2(1 - \mu^2)(2\eta - 1)^3 + 24\eta^2(1 - \mu^2)(2\eta - 1) + 2(1 + \mu)(2\eta - 1) + (1 + \mu)(1 - \mu^2)(2\eta - 1)^4 + 2(2\eta - 1)(1 - \mu^2),$
 $a_3 = 6 + (1 - \mu^2)(2\eta - 1)^3 + 12(1 - \mu^2)\eta^2(2\eta - 1) + 4(1 + \mu)(2\eta - 1) + (1 + \mu^2)(2\eta - 1),$
 $a_4 = 4 + 2(1 + \mu)(2\eta - 1),$
 $a_5 = 1.$

Jestliže současně výška žebor $h \rightarrow 0$ a vzdálenost žebor $b_0 \rightarrow b_1$, tj. $\eta \rightarrow 0,5$ a $\beta \rightarrow 1$ je stejně jako pro případ, kdy současně výška žebor $h \rightarrow 0$ a vzdálenost žebor $b_0 \rightarrow \infty$, tj. $\eta \rightarrow 0,5$ a $\beta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 4, \\ a_3 &= 6, \\ a_4 &= 4, \\ a_5 &= 1, \end{aligned}$$

Pro případ, kdy současně tloušťka desky $d \rightarrow 0$ a vzdálenost žebor $b_0 \rightarrow b_1$, tj. pro $\eta \rightarrow \infty$ a $\beta \rightarrow 1$ vychází

$$\begin{aligned} a_1 &= 16(1 - \mu^2)^2, \\ a_2 &= 32(1 - \mu^2)(1 + \mu), \\ a_3 &= a_4 = a_5 = 0. \end{aligned}$$

Z tohoto rozboru vidíme, že s výjimkou případu, ve kterém $\eta \rightarrow \infty$, tj. pro trámovou konstrukci spojenou membránou, a případu, kde současně $\eta \rightarrow \infty$ a $\beta \rightarrow 0$ a který nemá praktického smyslu, platí vždy

$$\begin{aligned} a_1 &\geq 1, \\ a_2 &\geq 4, \\ a_3 &\geq 6, \\ a_4 &\geq 4, \\ a_5 &\geq 1. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Mezní případy a) a c) odpovídají přechodu konstrukce v izotropní desku tloušťky d . Rovnice (5.23) v tomto případě má tvar

$$\frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + 4 \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial y^2} + 6 \frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial y^4} + 4 \frac{\partial^8 w}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{\partial^8 w}{\partial y^8} = 0 \quad (5.38)$$

neboli

$$\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w = 0.$$

Stejnému tvaru odpovídají případy, kdy současně $\eta \rightarrow 0,5$ a $\beta \rightarrow 1$, nebo $\eta \rightarrow 0,5$ a $\beta \rightarrow 0$.

5.5. Řešení homogenní rovnice

Řešení speciální rovnice (5.38) bude až na konstanty shodné s řešením obecné rovnice (5.23). Budeme se proto pro jednoduchost nejdříve zabývat rovnicí izotropní desky se součiniteli 1, 4, 6, 4, 1.

Řešení budeme hledat ve tvaru

$$w_0(x, y) = X(x) Y(y), \quad (5.39)$$

kde $X(x)$ je funkce závislá pouze na x , a $Y(y)$ je funkce závislá pouze na y .

Dosazením do rovnice (5.38) obdržíme

$$X^{VIII} Y + 4X^{VI} Y^{II} + 6X^{IV} Y^{IV} + 4X^{II} Y^{VI} + XY^{VIII} = 0 \quad (5.40)$$

a po úpravě

$$\frac{X^{VIII}}{X} + 4 \frac{X^{VI}}{X} \frac{Y^{II}}{Y} + 6 \frac{X^{IV}}{X} \frac{Y^{IV}}{Y} + 4 \frac{X^{II}}{X} \frac{Y^{VI}}{Y} + \frac{Y^{VIII}}{Y} = 0.$$

Aplikujeme-li metodu řešení Filona-Rivera (viz příloha II), dostaneme

$$X(x) = D_1 \cos \lambda_x + D_2 \sin \lambda_x \quad (5.41)$$

a pro neznámou funkci $Y(y)$ obvyčejnou diferenciální rovnici 8. řádu s konstantními součiniteli

$$\lambda^8 Y - 4\lambda^6 Y^{II} + 6\lambda^4 Y^{IV} - 4\lambda^2 Y^{VI} + Y^{VIII} = 0. \quad (5.42)$$

Předpoklady oprávněného použití této metody jsou uvedeny v příloze III.

Přejdeme-li nyní k obecnému případu se součiniteli a_i podle rovnice (5.23), ne n -tý člen řady:

$$a_1 \lambda_n^8 Y_n(y) - a_2 \lambda_n^6 Y_n^{II}(y) + a_3 \lambda_n^4 Y_n^{IV}(y) - a_4 \lambda_n^2 Y_n^{VI}(y) + a_5 Y_n^{VIII}(y) = 0.$$

TABULKA I

Řešení rovnice (5.23) pro obecné zatížení

Případ	Druh kořenů bikvadratické rovnice (5.43)	Tvar funkce $w_0(x, y)$
1a	4 reálné různé	$(K_1 \cos \lambda x + K_2 \sin \lambda x) (C_1 \operatorname{ch} g_1 y + C_2 \operatorname{sh} g_1 y + C_3 \operatorname{ch} g_2 y + C_4 \operatorname{sh} g_2 y + C_5 \operatorname{ch} g_3 y + C_6 \operatorname{sh} g_3 y + C_7 \operatorname{ch} g_4 y + C_8 \operatorname{sh} g_4 y)$
1b	2 reálné různé 1 reálný dvojný	$(K_1 \cos \lambda x + K_2 \sin \lambda x) (C_1 \operatorname{ch} g_1 y + C_2 \operatorname{sh} g_1 y + C_3 \operatorname{ch} g_2 y + C_4 \operatorname{sh} g_2 y + C_5 \operatorname{ch} g_3 y + C_6 \operatorname{sh} g_3 y + C_7 y \operatorname{ch} g_3 y + C_8 y \operatorname{sh} g_3 y)$
1c	2 reálné dvojný	$(K_1 \cos \lambda x + K_2 \sin \lambda x) (C_1 \operatorname{ch} g_1 y + C_2 \operatorname{sh} g_1 y + C_3 y \operatorname{ch} g_1 y + C_4 y \operatorname{sh} g_1 y + C_5 \operatorname{ch} g_2 y + C_6 \operatorname{sh} g_2 y + C_7 y \operatorname{ch} g_2 y + C_8 y \operatorname{sh} g_2 y)$
1d	1 reálný čtyřnásobný	$(K_1 \cos \lambda x + K_2 \sin \lambda x) (C_1 \operatorname{ch} g_1 y + C_2 \operatorname{sh} g_1 y + C_3 y \operatorname{ch} g_1 y + C_4 y \operatorname{sh} g_1 y + C_5 y^2 \operatorname{ch} g_1 y + C_6 y^2 \operatorname{sh} g_1 y + C_7 y^3 \operatorname{ch} g_1 y + C_8 y^3 \operatorname{sh} g_1 y)$
1e	1 reálný jednoduchý 1 reálný trojnásobný	$(K_1 \cos \lambda x + K_2 \sin \lambda x) (C_1 \operatorname{ch} g_1 y + C_2 \operatorname{sh} g_1 y + C_3 \operatorname{ch} g_2 y + C_4 \operatorname{sh} g_2 y + C_5 y \operatorname{ch} g_2 y + C_6 y \operatorname{sh} g_2 y + C_7 y^2 \operatorname{ch} g_2 y + C_8 y^2 \operatorname{sh} g_2 y)$
2f	2 reálné různé 1 komplexně sdružený	$(K_1 \cos \lambda x + K_2 \sin \lambda x) (C_1 \operatorname{ch} g_1 y + C_2 \operatorname{sh} g_1 y + C_3 \operatorname{ch} g_2 y + C_4 \operatorname{sh} g_2 y + \cos Xy (C_5 \operatorname{ch} \tau y + C_6 \operatorname{sh} \tau y) + \sin Xy (C_7 \operatorname{ch} \tau y + C_8 \operatorname{sh} \tau y))$
2g	1 reálný dvojný 1 komplexně sdružený	$(K_1 \cos \lambda x + K_2 \sin \lambda x) (C_1 \operatorname{ch} g_1 y + C_2 \operatorname{sh} g_1 y + C_3 y \operatorname{ch} g_1 y + C_4 y \operatorname{sh} g_1 y + \cos Xy (C_5 \operatorname{ch} \tau y + C_6 \operatorname{sh} \tau y) + \sin Xy (C_7 \operatorname{ch} \tau y + C_8 \operatorname{sh} \tau y))$
3h	2 různé, komplexně sdružené	$(K_1 \cos \lambda x + K_2 \sin \lambda x) [\cos Xy (C_1 \operatorname{ch} \tau y + C_2 \operatorname{sh} \tau y) + \sin Xy (C_3 \operatorname{ch} \tau y + C_4 \operatorname{sh} \tau y) + \cos \Psi y (C_5 \operatorname{ch} \gamma y + C_6 \operatorname{sh} \gamma y) + \sin \Psi y (C_7 \operatorname{ch} \gamma y + C_8 \operatorname{sh} \gamma y)]$
3i	1 dvojný, komplexně sdružený	$(K_1 \cos \lambda x + K_2 \sin \lambda x) [\cos Xy (C_1 \operatorname{ch} \tau y + C_2 \operatorname{sh} \tau y) + \sin Xy (C_3 \operatorname{ch} \tau y + C_4 \operatorname{sh} \tau y) + y \cos Xy (C_5 \operatorname{ch} \tau y + C_6 \operatorname{sh} \tau y) + y \sin Xy (C_7 \operatorname{ch} \tau y + C_8 \operatorname{sh} \tau y)]$

TABULKA II

Řešení rovnice (5.23) pro zatížení symetrické a antisymetrické

Tvar funkce $w_0(x, y)$		
Zatížení symetrické	Případ	Zatížení antisymetrické
$K_1 \cos \lambda x (C_1 \operatorname{ch} g_1 y + C_3 \operatorname{ch} g_2 y + C_5 \operatorname{ch} g_3 y + C_7 \operatorname{ch} g_4 y)$	1a	$K_2 \sin \lambda x (C_2 \operatorname{sh} g_1 y + C_4 \operatorname{sh} g_2 y + C_6 \operatorname{sh} g_3 y + C_8 \operatorname{sh} g_4 y)$
$K_1 \cos \lambda x (C_1 \operatorname{ch} g_1 y + C_3 \operatorname{ch} g_2 y + C_5 \operatorname{ch} g_3 y + C_8 y \operatorname{sh} g_3 y)$	1b	$K_2 \sin \lambda x (C_2 \operatorname{sh} g_1 y + C_4 \operatorname{sh} g_2 y + C_6 \operatorname{sh} g_3 y + C_7 y \operatorname{ch} g_3 y)$
$K_1 \cos \lambda x (C_1 \operatorname{ch} g_1 y + C_4 y \operatorname{sh} g_1 y + C_5 \operatorname{ch} g_2 y + C_8 y \operatorname{sh} g_2 y)$	1c	$K_2 \sin \lambda x (C_2 \operatorname{sh} g_1 y + C_3 y \operatorname{ch} g_1 y + C_6 \operatorname{sh} g_2 y + C_7 y \operatorname{ch} g_2 y)$
$K_1 \cos \lambda x (C_1 \operatorname{ch} g_1 y + C_4 y \operatorname{sh} g_1 y + C_5 y^2 \operatorname{ch} g_1 y + C_8 y^3 \operatorname{sh} g_1 y)$	1d	$K_2 \sin \lambda x (C_2 \operatorname{sh} g_1 y + C_3 y \operatorname{ch} g_1 y + C_6 y^2 \operatorname{sh} g_1 y + C_7 y^3 \operatorname{ch} g_1 y)$
$K_1 \cos \lambda x (C_1 \operatorname{ch} g_1 y + C_3 \operatorname{ch} g_2 y + C_6 y \operatorname{sh} g_2 y + C_7 y^2 \operatorname{ch} g_2 y)$	1e	$K_2 \sin \lambda x (C_2 \operatorname{sh} g_1 y + C_4 \operatorname{sh} g_2 y + C_5 y \operatorname{ch} g_2 y + C_8 y^2 \operatorname{sh} g_2 y)$
$K_1 \cos \lambda x (C_1 \operatorname{ch} g_1 y + C_3 \operatorname{ch} g_2 y + C_5 \cos Xy \operatorname{ch} \tau y + C_8 \sin Xy \operatorname{sh} \tau y)$	2f	$K_2 \sin \lambda x (C_2 \operatorname{sh} g_1 y + C_4 \operatorname{sh} g_2 y + C_6 \cos Xy \operatorname{sh} \tau y + C_7 \sin Xy \operatorname{ch} \tau y)$
$K_1 \cos \lambda x (C_1 \operatorname{ch} g_1 y + C_4 y \operatorname{sh} g_1 y + C_5 \cos Xy \operatorname{ch} \tau y + C_8 \sin Xy \operatorname{sh} \tau y)$	2g	$K_2 \sin \lambda x (C_2 \operatorname{sh} g_1 y + C_3 y \operatorname{ch} g_1 y + C_6 \cos Xy \operatorname{sh} \tau y + C_7 \sin Xy \operatorname{ch} \tau y)$
$K_1 \cos \lambda x (C_1 \cos Xy \operatorname{ch} \tau y + C_4 \sin Xy \operatorname{sh} \tau y + C_5 \cos \Psi y \operatorname{ch} \gamma y + C_8 \sin \Psi y \operatorname{sh} \gamma y)$	3h	$K_2 \sin \lambda x (C_2 \sin Xy \operatorname{ch} \tau y + C_3 \cos Xy \operatorname{sh} \tau y + C_7 \sin \Psi y \operatorname{ch} \gamma y + C_8 \cos \Psi y \operatorname{sh} \gamma y)$
$K_1 \cos \lambda x (C_1 \cos Xy \operatorname{ch} \tau y + C_4 \sin Xy \operatorname{sh} \tau y + C_6 y \cos \Psi y \operatorname{sh} \gamma y + C_7 y \sin \Psi y \operatorname{ch} \gamma y)$	3i	$K_2 \sin \lambda x (C_2 \cos Xy \operatorname{sh} \tau y + C_3 \sin Xy \operatorname{ch} \tau y + C_5 y \cos \Psi y \operatorname{ch} \gamma y + C_8 y \sin \Psi y \operatorname{sh} \gamma y)$

Řešení této rovnice budeme hledat ve tvaru

$$Y_n(y) = e^{\gamma_n y}.$$

Tomu odpovídající charakteristická rovnice je

$$a_5 \gamma_n^8 - a_4 \lambda_n^2 \gamma_n^6 + a_3 \lambda_n^4 \gamma_n^4 - a_2 \lambda_n^6 \gamma_n^2 + a_1 \lambda_n^8 = 0,$$

kteřá po provedení substituce

$$\gamma_n^2 = \vartheta_n$$

přejde do tvaru

$$a_5 \delta_n^4 - a_4 \lambda_n^2 \delta_n^3 + a_3 \lambda_n^4 \delta_n^2 - a_2 \lambda_n^6 \delta_n + a_1 \lambda_n^8 = 0. \quad (5.43)$$

Řešení této bikvadratické rovnice je různé podle typu kořenů:

1. všechny čtyři kořeny reálné,
 - a) všechny čtyři kořeny různé,
 - b) dva kořeny různé, jeden dvojný,
 - c) dva kořeny dvojný,
 - d) jeden kořen čtyřnásobný,
 - e) jeden kořen trojnásobný, jeden jednoduchý.
2. dva kořeny reálné a dva kořeny komplexní:
 - f) dva kořeny reálné různé, dva kořeny komplexní,
 - g) jeden kořen reálný dvojný, dva kořeny komplexní,
3. všechny čtyři kořeny komplexní:
 - h) dva různé, komplexně sdružené kořeny,
 - i) jeden kořen dvojný, komplexně sdružený.

Řešení pro jednotlivé případy je v příloze IV.

V tabulce I jsou seřazeny tvary jednoho členu řady výsledné funkce w_0 vyjádřené podle rovnice (5.39) pro jednotlivé případy řešení bikvadratické rovnice a pro obecné zatížení. V tab. II pro zatížení symetrické resp. antisymetrické.

5.6. Partikulární řešení

V dalším je uvažován pouze případ desky uložené prostě po dvou okrajích a volné po dvou zbývajících. Obvykle v tomto případě bude nejvýhodnější jako partikulárního integrálu použít řešení pásu $w(x)$.

5.7. Obecné řešení

Obecné řešení vychází superpozicí předchozích dvou ve tvaru

$$w(x, y) = w_0(x, y) + w(x). \quad (5.44)$$

5.8. Rovnice obecně zatížené desky

Zavedeme-li do rovnice (5.9) vnější zatížení $P(x, y)$, dostaneme vyloučením posuvů u, v a po úpravách výslednou rovnici zatížené desky obdobně k rovnici (5.23).

$$a_1 w^{80} + a_2 w^{62} + a_3 w^{44} + a_4 w^{26} + a_5 w^{08} + a_6 p^{40} + a_7 p^{22} + a_8 p^{04} = 0, \quad (5.45)$$

kde součinitelé $a_1 - a_5$ mají stejný význam jako dříve (rovnice 5.24a-e) a

$$\begin{aligned} a_6 &= -\bar{f}_T d, \\ a_7 &= -2\bar{f}_T \bar{f}_P (1 + \mu) + \frac{2\mu d^2}{(1 - \mu)(1 - \mu^2)}, \\ a_8 &= -d \bar{f}_P. \end{aligned} \quad (5.24f-h)$$

5.9. Řešení pro konstrukci zatíženou rovnoměrně

Jestliže $p(x, y)$ bude rovnoměrné zatížení, lze jej rozvinout ve Fourierovu řadu pouze podle x .

Potom

$$p(x) = \frac{4p}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{2l} = \frac{4p}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} H_n \cos \lambda_n x$$

a dále

$$p^{22} = p^{04} = 0.$$

Rovnice (5.45) přejde do tvaru

$$a_1 w^{80} + a_2 w^{62} + a_3 w^{44} + a_4 w^{26} + a_5 w^{08} = a_6 p^{40}. \quad (5.46)$$

Řešení homogenní rovnice předpokládáme (podle tab. II)

$$w_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \lambda_n x Y_n(y), \quad \text{kde } \lambda_n = \frac{n\pi}{2l} \quad (n = 1, 3, 5, \dots).$$

Dosazením do rovnice (5.46) dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\cos \lambda_n x) (a_1 \lambda_n^8 Y_n(y) - a_2 \lambda_n^6 Y_n''(y) + a_3 \lambda_n^4 Y_n^{IV}(y) - \\ - a_4 \lambda_n^2 Y_n^{VI}(y) + a_5 Y_n^{VIII}(y)) = 0. \end{aligned}$$

Použijeme-li opět

$$Y_n(y) = e^{\gamma_n y}$$

po dosazení dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\gamma_n y} \cos \lambda_n x (a_1 \lambda_n^8 - a_2 \lambda_n^6 \gamma_n^2 + a_3 \lambda_n^4 \gamma_n^4 - a_4 \lambda_n^2 \gamma_n^6 + a_5 \gamma_n^8) = 0.$$

Tento výraz musí platit v oblasti $-b \leq y \leq +b$, $-l \leq x \leq +l$ pro libovolné x a y . Potom bude

$$a_1 \lambda_n^8 - a_2 \lambda_n^6 \gamma_n^2 + a_3 \lambda_n^4 \gamma_n^4 - a_4 \lambda_n^2 \gamma_n^6 + a_5 \gamma_n^8 = 0$$

a po substituci $\gamma_n^2 = \vartheta_n$ dostáváme bikvadratickou rovnici

$$a_1 \lambda_n^8 - a_2 \lambda_n^6 \vartheta_n + a_3 \lambda_n^4 \vartheta_n^2 - a_4 \lambda_n^2 \vartheta_n^3 + a_5 \vartheta_n^4 = 0.$$

Předpokládáme dále, že součinitelé $a_1 - a_5$ budou mít na příklad takový tvar, aby rovnice měla 4násobný kořen.

Potom, zavedeme-li

$$(K_1 \cdot C_{mn})_{m=1,4,5,8} = A_n, B_n, C_n, D_n \text{ a } g_{1n} = \lambda,$$

je

$$w_0(x, y) = \sum (\cos \lambda_n x) (A_n \operatorname{ch} \lambda_n y + B_n y \operatorname{sh} \lambda_n y + C_n y^2 \operatorname{ch} \lambda_n y + D_n y^3 \operatorname{sh} \lambda_n y).$$

Jako partikulární integrál použijeme řešení pásu

$$w(x) = \sum_1^{\infty} P_n \cos \lambda_n x, \quad (5.48)$$

kde

$$P_n = - \frac{a_6}{a_1} \frac{4p}{\pi \lambda_n^4 n} \sin \frac{n\pi}{2}. \quad (5.49)$$

Řešení nehomogenní rovnice potom je

$$w(x, y) = w_0(x, y) + w(x) = \sum_1^{\infty} (\cos \lambda_n x) (P_n + A_n \operatorname{ch} \lambda_n y + B_n y \operatorname{sh} \lambda_n y + C_n y^2 \operatorname{ch} \lambda_n y + D_n y^3 \operatorname{sh} \lambda_n y). \quad (5.50)$$

Hodnoty konstant $A_n - D_n$ určíme z okrajových podmínek

$$\begin{aligned} 1. \left[M_y = Ej \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]_{y=\pm b} &= 0, \\ 2. \left[N_y = \frac{Ed}{(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]_{y=\pm b} &= 0, \\ 3. \left[T_{xy} = \frac{Ed}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]_{y=\pm b} &= 0, \\ 4. \left[\bar{Q}_y = Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = - \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \right. \\ &= - \left. Ej \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \right]_{y=\pm b} = 0. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Postup při určování konstant je uveden obecně v příloze V. Při přechodu na izotropní desku jsou uvedeny příslušné vztahy v příloze VI.

Výsledkem pro izotropní desku je $C_n = D_n = 0$

$$\begin{aligned} A_n &= - \frac{4\mu p}{\pi j \lambda_n^4 n (1-\mu)^2} \sin \frac{n\pi}{2} \left\{ \frac{(1+\mu) \operatorname{sh} \lambda_n b - (1-\mu) \lambda_n b \operatorname{ch} \lambda_n b}{\operatorname{ch} \lambda_n b \operatorname{sh} \lambda_n b + \lambda_n b (\operatorname{ch}^2 \lambda_n b + \operatorname{sh}^2 \lambda_n b)} \right\}, \\ B_n &= - \frac{4\mu p}{\pi j \lambda_n^3 n (1-\mu)} \sin \frac{n\pi}{2} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \lambda_n b}{\operatorname{ch} \lambda_n b \operatorname{sh} \lambda_n b + \lambda_n b (\operatorname{ch}^2 \lambda_n b + \operatorname{sh}^2 \lambda_n b)} \right\}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

a průhybová funkce

$$w = \sum_1^{\infty} (\cos \lambda_n x) (P_n + A_n \operatorname{ch} \lambda_n y + B_n y \operatorname{sh} \lambda_n y). \quad (5.53)$$

Důkaz o shodě tohoto řešení s řešením podle obvyklé rovnice izotropní desky 4. řádu je uveden v příloze VII.

Řešení rovnice (5.23) tímto způsobem je však v obecném případě velmi obtížné, zvláště vzhledem k potížím, vznikajícím v určení okrajových podmínek pro funkce u, v , které jsou dány rovnicemi (5.25) a (5.27). V kapitole 5.11 je proto uveden jiný postup tyto obtíže odstraňující, který záleží v tom, že jsou vyjádřeny okrajové podmínky přímo pro funkci w , danou rovnicí (5.23). Vyhnete se tím několikanásobnému integrování nutnému při použití postupu, který naznačil Trenks [14] při vyjadřování funkcí u a v k získání potřebných konstant.

V další kapitole 5.10 je řešení rovnice (5.23) pro zatížení přímkovým zatížením pro koeficienty $a_1 - a_5$ takového tvaru, aby rovnice měla čtyřnásobný kořen, což odpovídá izotropní desce. Uvedený postup však lze zobecnit pro libovolnou konstrukci.

5.10. Řešení pro konstrukci zatíženou přímkovým zatížením

Řešení pro přímkové zatížení je provedeno jako řešení nekonečného pásu pro rovnici tvaru

$$\frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + 4 \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial y^2} + 6 \frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial y^4} + 4 \frac{\partial^8 w}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{\partial^8 w}{\partial y^8} = 0.$$

Budeme požadovat, aby pro $y > 0$ a $y \rightarrow \infty$ průhyb w i jeho derivace se anulovaly.

Pro průhybovou funkci w platí pro daný případ (podle tab. II)

$$w = \sum_1^{\infty} (\cos \lambda_n x) (A_n e^{-\lambda_n y} + B_n y e^{-\lambda_n y} + C_n y^2 e^{-\lambda_n y} + D_n y^3 e^{-\lambda_n y}). \quad (5.54)$$

Dále platí

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{i_T}{s_T} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2j}{s_T} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + j \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}, \quad (5.27c)$$

$$\frac{\partial^5 v}{\partial y^5} = b_1 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + b_2 \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} + b_3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} + b_4 \frac{\partial^6 w}{\partial y^6}. \quad (5.25b)$$

Po vyjádření příslušných derivací w , u a v dostaneme první dvě konstanty z podmínek

$$\left(\frac{\partial N_x}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \quad \text{kde } N_x = \left(\frac{Ed}{1-\mu^2} + E_j^T \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\mu Ed}{1-\mu^2} \frac{\partial v}{\partial y} - E_s^T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$\text{a } \left(\frac{\partial N_y}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \quad \text{kde } N_y = \frac{Ed}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Další dvě konstanty plynou z podmínek použitých např. Massonnetem (kap. 2).
Ze symetrie vychází

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$$

(anebo $w_{+e} - w_{-e} = 0$, je-li $\pm e$ vzdálenost od počátku ve směru Y , když počátek je v působišti zatížení) a dále po vyjádření posouvajících sil podél osy X jako funkce průhybu w

$$(Q_y^p + Q_y^l + p_x)_{y=0} = 0,$$

nebo přímo

$$(Q_y)_{y=0} = \frac{p_x}{2}.$$

Odvození prvních dvou podmínek je uvedeno v příloze VIII.

5.11. Přímé řešení z rovnice (5.23)

5.11.1. Okrajové podmínky

Předpokládáme, že konstrukce je uložena podél přímky $x = -l$ neposuvně, podél přímky $x = +l$ posuvně a podél přímek $y = \pm b$ volná. Přitom se předpokládá, že posuvu ve směru Y podél přímek $x = \pm l$ je zabráněno.

Rovnice, popisující daný problém, jsou: (5.9'), (5.10'), (5.11'). Rovnice (5.9') je uvedena pro nezatíženou desku. V případě desky zatížené svislým zatížením $p(x, y)$ nebude rovnice (5.9') homogenní, nýbrž bude tvaru (s použitím označení podle přílohy I)

$$h(w^{40} + 2w^{22} + w^{04}) + kw^{40} - gu^{30} = p(x, y). \quad (5.9'')$$

Výrazy pro vnitřní síly jsou dány vzorcí (5.5a-f).

Z podmínek podepření podél $x = \pm l$ plyne

$$(w)_{(\pm l, y)} = 0, \quad (5.55)$$

$$(v)_{(\pm l, y)} = 0, \quad (5.56)$$

a dále

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{(\pm l, y)} = \left(\frac{\partial^k w}{\partial y^k}\right)_{(\pm l, y)} = 0, \quad (5.55')$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{(\pm l, y)} = \left(\frac{\partial^k v}{\partial y^k}\right)_{(\pm l, y)} = 0. \quad (5.56')$$

Ze způsobu podepření plyne

$$(M_x)_{(\pm l, y)} = 0 \quad (5.57)$$

a s použitím vzorce (5.5d) s ohledem na (5.55') vychází

$$-(h+k) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (5.57')$$

Pro normálnou sílu N_x platí, že

$$(N_x)_{(\pm l, y)} = 0 \quad (5.58)$$

a s použitím výrazu (5.5a) a s přihlédnutím k (5.56') dostáváme

$$d \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (5.58')$$

Rovnice (5.57') a (5.58') je soustava dvou homogenních rovnic pro určení neznámých $\partial^2 w / \partial x^2$ a $\partial u / \partial x$ pro $x = \pm l$; determinant soustavy však, poněvadž $(h+k)d \neq g^2$, je rozdílný od nuly, a proto platí:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{(\pm l, y)} = 0, \quad (5.59)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(\pm l, y)} = 0, \quad (5.60)$$

neboli křivost a poměrné přetvoření ve směru X na okrajích $(\pm l, y)$ jsou rovny nule.

Podél krajů $y = \pm b$ musí platit, že

$$M_y = \bar{Q}_y = 0.$$

S použitím vzorců (5.5e) a (5.7b) a vztahu pro reakci

$$\bar{Q}_y = Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \quad (5.61)$$

dostaneme tyto podmínky:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=\pm b} = 0, \quad (5.62)$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right)_{y=\pm b} = 0. \quad (5.63)$$

Podél krajů $y = \pm b$ musí být rovněž splněna podmínka, že

$$(N_y)_{(x, \pm b)} = 0. \quad (5.64)$$

Tedy vzhledem ke vzorci (5.5b) platí

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y=\pm b} = 0. \quad (5.64')$$

Konečně jako poslední uvažujeme podmínku pro sílu T_{yx} . Jelikož síly T_{xy} podél $x = \pm l$ jsou rovny nule, tvořily by síly T_{yx} podél $y = \pm b$ dvojici sil; jelikož však celá soustava není žádnou vnější silou držena v rovnováze, musí nezbytně být

$$T_{yx} = 0 \quad (5.65)$$

a potom ze vzorce (5.5c) plyne

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{y=\pm b} = 0. \quad (5.65')$$

Kdybychom chtěli použít způsobu, který naznačil Trenks, musili bychom získat funkce u a v a z nich pak určit $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$ a potřebné konstanty. Místo toho budeme hledat přímo okrajové podmínky pro funkci w , v níž je vyjádřena rovnice (5.23).

Rovnice (5.10'), (5.11') a (5.9'') platí pro celou konstrukci, a tedy i na okrajích. Toho využijeme pro hledání okrajových podmínek funkce w .

Ze čtyř okrajových podmínek (5.55), (5.56), (5.59) a (5.60), platných pro okraj $x = \pm l$, je pouze podmínka (5.55) a (5.59) vyjádřena funkcí w . Nyní využijeme podmínek (5.56) a (5.60) i podmínek (5.55'), (5.56') a ještě podmínky, která plyne ze vzorce (5.60), totiž

$$\left(\frac{\partial^{1+k} u}{\partial x \partial y^k}\right)_{(x=\pm l)} = 0. \quad (5.60')$$

Derivujeme-li rovnici (5.11') podle x , získáme

$$a \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + b \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + d \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - g \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0. \quad (5.11a')$$

Rovnice (5.10') derivovaná podle y má tvar

$$a \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + b \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + c \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} = 0. \quad (5.10'a)$$

Z rovnice (5.10'a) vzhledem k podmínkám (5.56') a (5.60') vychází, že

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = 0. \quad (5.66)$$

Potom z (5.11'a) vychází

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{g}{d} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$$

Dosadíme-li tento vztah do rovnice (5.9''), dostaneme

$$h \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + k \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{g^2}{d} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = p(x, y) \quad (5.9'a)$$

platnou pro $x = \pm l$.

Jelikož z (5.59) plyne, že $(\partial^4 w / \partial x^2 \partial y^2)_{(x=\pm l)} = 0$, potom ještě s použitím vzorce (5.55') získáme z (5.9''):

$$\left(h + k - \frac{g^2}{d}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = p(x, y). \quad (5.67)$$

Jelikož $h + k - g^2/d$ je různé od nuly, platí, že

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{p(x, y)}{(h + k - g^2/d)}, \quad (5.67')$$

což je další podmínka pro funkci w .

Pro získání poslední podmínky pro kraj $x = \pm l$ derivujeme rovnici (5.10') třikrát podle y ; tím získáme

$$a \frac{\partial^5 v}{\partial x^2 \partial y^3} + b \frac{\partial^5 u}{\partial x \partial y^4} + c \frac{\partial^5 v}{\partial y^5} = 0. \quad (5.10'b)$$

Protože $\partial^5 u / \partial x \partial y^4$ vzhledem k (5.60') je rovno nule a rovněž $\partial^5 v / \partial y^5$, musí být

$$\frac{\partial^5 v}{\partial x^2 \partial y^3} = 0, \quad (5.66')$$

což ostatně plyne také z podmínky (5.66), protože funkce $\partial^3 v / \partial x^2 \partial y$ pro $x = \pm l$ byla nulová a její derivace ve směru podepření jsou též nulové.

Rovnici (5.10') derivujeme dvakrát podle x a jednou podle y , tím dostaneme:

$$a \frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial y} + b \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} + c \frac{\partial^5 v}{\partial x^2 \partial y^3} = 0 \quad (5.10'c)$$

se zřetelem ke vztahu (5.66') vychází

$$a \frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial y} + b \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} = 0. \quad (5.68)$$

Rovnice (5.11') derivovaná třikrát podle x má tvar

$$a \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} + b \frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial y} + d \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} - g \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} = 0 \quad (5.11'b)$$

a též rovnice (5.11'), derivovaná jednou podle x a dvakrát podle y , vychází ve tvaru

$$a \frac{\partial^5 u}{\partial x \partial y^4} + b \frac{\partial^5 v}{\partial x^2 \partial y^3} + d \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} - g \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} = 0. \quad (5.11'c)$$

Jelikož

$$\frac{\partial^5 x}{\partial x \partial y^4} = \frac{\partial^5 v}{\partial x^2 \partial y^3} = 0,$$

dostaneme z (5.11'c)

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} = \frac{g}{d} \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2}; \quad (5.69)$$

z (5.68) plyne

$$\frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial y} = -\frac{b}{a} \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2}.$$

Dosadíme-li do tohoto výrazu za $\partial^5 u / \partial x^3 \partial y^2$ z (5.69), dostaneme

$$\frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial y} = -\frac{bg}{ad} \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2}. \quad (6.70)$$

Dosadíme-li za $\partial^5 v / \partial x^4 \partial y$ a za $\partial^5 u / \partial x^3 \partial y^2$ z (5.70) a (5.69) do rovnice (5.11b), můžeme vypočítat $\partial^5 u / \partial x^5$; čili

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} = \frac{g}{d} \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + \frac{1}{d} \left(\frac{b^2 g}{ad} - \frac{ag}{d} \right) \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2}. \quad (5.71)$$

Z rovnice (5.67') vychází

$$\frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} = \frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial y^2} \frac{1}{h + k - \frac{g^2}{d}}. \quad (5.72)$$

Vložení (5.72) do (5.70) dostaneme rovnici

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} = \frac{g}{d} \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + \frac{1}{d} \left(\frac{b^2 g}{ad} - \frac{ag}{d} \right) \frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial y^2}. \quad (5.73)$$

Rovnice (5.9'') derivovaná dvakrát podle x je

$$(h + k) \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + 2h \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} + h \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} - g \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} = \frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial x^2}. \quad (5.74)$$

Vložíme-li do předchozí rovnice za $\partial^5 u / \partial x^5$ z (5.73) a za $\partial^4 w / \partial x^4 \partial y^2$ z (5.72) a vzhledem k tomu, že $\partial^6 w / \partial x^2 \partial y^4 = 0$, dostaneme po úpravě rovnici

$$\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial y^2} \right], \quad (5.75)$$

$$\alpha = h + k - \frac{g^2}{d}, \quad (5.76)$$

$$\beta = \frac{2h}{h + k - \frac{g^2}{d}} - \frac{g^2}{d} \cdot \frac{b^2 - a^2}{ad \left(h + k - \frac{g^2}{d} \right)}. \quad (5.77)$$

Dále musíme určit okrajové podmínky konstrukce pro volné kraje $y = \pm b$.

Z výrazů (5.62), (5.63), (5.64'), (5.65') a při použití rovnic (5.10'), (5.11') a (5.9'') vyloučíme funkce u, v , a tím dostaneme okrajové podmínky pouze pro funkci w .

Z rovnice (5.64') plyne

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

a z rovnice (5.65)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Potom z rovnice (5.11'), s přihlédnutím k hořejším vztahům, plyne

$$(b - a) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, \quad (5.78)$$

Jelikož $\partial^3 v / \partial x^2 \partial y = -\mu (\partial^3 u / \partial x^3)$, můžeme rovnici (5.78) derivovat podle x a po provedení substituce napsat ve tvaru

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{g}{d - \mu(b - a)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}. \quad (5.79)$$

Dosadíme-li rovnici (5.79) do rovnice (5.9''), obdržíme

$$\left(h + k - \frac{g^2}{d - \mu(b - a)} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2h \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + h \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y). \quad (5.80)$$

Derivujeme znovu rovnici (5.11') třikrát podle x ; dostaneme

$$a \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} + b \frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial y} + d \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} - g \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} = 0. \quad (5.11'd)$$

Rovnici (5.10') derivujeme dvakrát podle x a jednou podle y , tím dostaneme

$$a \frac{\partial^6 v}{\partial x^4 \partial y} + b \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} + c \frac{\partial^5 v}{\partial x^2 \partial y^3} = 0, \quad (5.10'd)$$

z toho vyjádříme

$$\frac{\partial^5 v}{\partial x^4 \partial y} = -\frac{b}{a} \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} - \frac{c}{a} \frac{\partial^5 v}{\partial x^2 \partial y^3}. \quad (5.81)$$

Dosadíme-li z rovnice (5.81) $\partial^5 v / \partial x^4 \partial y$ do rovnice (5.11'd), dostaneme

$$a \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y} - \frac{b^2}{a} \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} - \frac{bc}{a} \frac{\partial^5 v}{\partial x^2 \partial y^3} + d \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} - g \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} = 0. \quad (5.82)$$

Derivujeme-li ještě rovnici (5.11') jednou podle x a dvakrát podle y , můžeme z ní vyjádřit $\frac{\partial^5 v}{\partial x^2 \partial y^3}$ vzhledem k tomu, že

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x \partial y^4} = - \frac{\partial^5 v}{\partial x^2 \partial y^3},$$

čili

$$\frac{\partial^5 v}{\partial x^2 \partial y^3} = - \frac{d}{b-a} \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} + \frac{g}{b-a} \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2}. \quad (5.83)$$

Potom dosadíme-li za $\frac{\partial^5 v}{\partial x^2 \partial y^3}$ z (5.83) do (5.82) a rovněž za $\frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2}$ a $\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}$ výrazy plynoucí z derivací rovnice (5.9''), dostaneme konečně

$$\begin{aligned} & \left[ad(h+k) \right] \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + \left[(h+k) \left(a^2 - b^2 + \frac{bcd}{b-a} \right) - \frac{bcg}{b-a} + 2adh \right] \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} + \\ & + \left[2h \left(a^2 - b^2 + \frac{bcd}{b-a} \right) + adh \right] \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} + \left[h \left(a^2 - b^2 + \frac{bcd}{b-a} \right) \right] \frac{\partial^6 w}{\partial y^6} = \\ & = \left(a^2 - b^2 + \frac{bcd}{b-a} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + ad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Potom je třeba hledat řešení rovnice (5.23) při okrajových podmínkách vyjádřených rovnicemi: (5.55), (5.56), (5.62), (5.63), (5.67'), (5.75), (5.80) a (5.84).

5.11.2. Řešení rovnice (5.23)

Řešení biharmonické rovnice (5.23) pro okrajové podmínky dané v předchozí kapitole lze nejlépe nalézt variační metodou. Základní funkci budeme volit ve tvaru

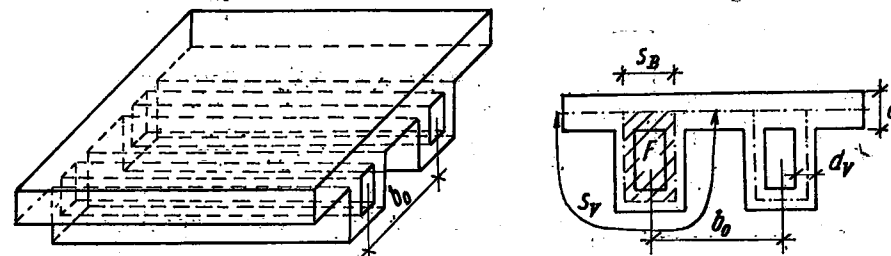
$$w = \sum_1^n a_n f_n(x, y),$$

při čemž zvolíme funkci $f_n(x, y)$ tak, aby vyhovovala přesně okrajovým podmínkám desky. V dalším řešení je nutno pomocí variačního počtu, např. metodou nejmenších čtverců, Ritzovou metodou minima potenciální energie apod., stanovit konstanty a_n tak, aby byla co nejlépe také splněna obecná rovnice desky.

6. KONSTRUKCE S VÝZTUHAMÍ TUHÝMI V KROUCENÍ PROBÍHAJÍCÍMI V JEDNOM SMĚRU

K předpokladům uvedeným v kap. 4 přistupuje zde ještě další:

Výztuhy jsou dutého uzavřeného průřezu a jsou schopny přenášet kroucení (obr. 8).



Obr. 8. Konstrukce s výztuhami tuhými v kroucení, probíhajícími v jednom směru.

Výrazy pro $N_x, N_y, M_x, M_y, M_{xy}$ (5.5a-f v kap. 5) platí zde stejně jako v předchozím případě.

Krouticí moment M_{xy} je složen ze dvou částí:

1. Krouticího momentu izotropní desky

$$M_{xy1} = \frac{Ed^3}{12(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (6.1)$$

2. Krouticího momentu uzavřeného dutého profilu (výztuhy s příslušnou částí desky) M_{xy2} .

Při použití označení:

F = plocha průřezu podélníku omezená jeho střednicí,

G = modul pružnosti ve smyku,

vyjádříme z výrazu

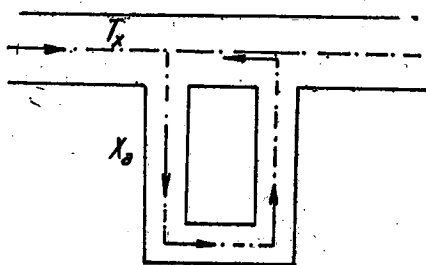
$$\begin{aligned} \frac{M_{xy2}^2}{8F^2G} \int_s \frac{ds}{d} &= \frac{1}{2} M_{xy2} \vartheta, \\ M_{xy2} &= \frac{4F^2G}{\int_s \frac{ds}{d}} \vartheta = \frac{4F^2G}{\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d}} \vartheta. \end{aligned}$$

Úhel zkroucení ϑ můžeme u tohoto navrženého profilu brát, vzhledem k pevnému spojení výztuhy s deskou, $\vartheta = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$. Potom

$$M_{xy2} = \frac{4F^2G}{\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (6.2)$$

Působením čistého smyku v horní izotropní desce nastane ve výztuhách neznámý smykový tok X_a (obr. 9).

Předpokládáme, že vliv výztuh kolmo k jejich ose můžeme zanedbat. Neznámý smykový tok X_a vypočteme z minima přetvárné práce. Na jednotku objemu je přetvárná práce ve smyku



$$\pi = \frac{\tau^2}{2G},$$

a tedy na jednotku délky výztuhy

$$\pi_1 = \frac{\tau^2 d_y}{2G}.$$

Celková přetvárná práce podélníku

$$\Pi_1 = \int_{s_V} \frac{\tau_1^2 d_y}{2G} ds. \quad (6.3)$$

Obr. 9. Smykový tok ve výztuze působením čistého smyku v horní izotropní desce.

V části izotropní desky, která tvoří horní část výztuhy, bude

$$\Pi_2 = \int_{s_B} \frac{\tau_2^2 d}{2G} ds. \quad (6.4)$$

Dosadíme-li do rovnice (6.3) a (6.4) za

$$\tau_1 = \frac{X_a}{d_y} \quad \text{a za} \quad \tau_2 = \frac{T_x - X_a}{d},$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \int_{s_V} \frac{X_a^2 d_y}{2d_y^2 G} ds, \\ \Pi_2 &= \int_{s_B} \frac{(T_x - X_a)^2 d}{2d^2 G} ds. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Potom celková přetvárná práce podélníku

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \int_{s_V} \frac{X_a^2}{2d_y G} ds + \int_{s_B} \frac{(T_x - X_a)^2}{2dG} ds. \quad (6.6)$$

Neznámý tok X_a určíme z podmínky

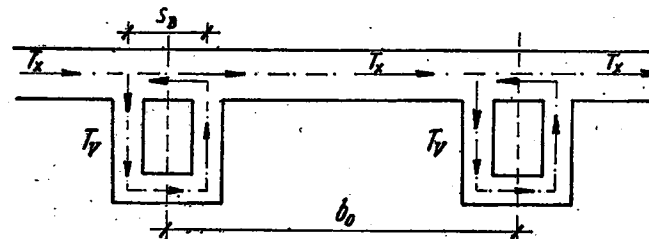
$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial X_a} &= 0, \\ \frac{X_a}{G d_y} \int_{s_V} ds - \frac{(T_x - X_a)}{G d} \int_{s_B} ds &= 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Po integraci a úpravě vyjádříme X_a :

$$X_a = T_x \frac{s_B/d}{\frac{s_V}{d_y} + \frac{s_B}{d}}. \quad (6.8)$$

Tento smykový tok X_a působí na výztuhu kroučícím momentem

$$M = 2X_a \cdot F.$$



Obr. 10. Smykový tok ve výztuze, vyvolaný čistým smykem a kroucením.

Potom, vzhledem k znaménkové úmluvě, moment vztažený na jednotku délky desky je

$$M_{xy_3} = - \frac{2X_a F}{b_0}. \quad (6.9)$$

Celkový kroučící moment M_{xy} vyplývá ze součtu složek

$$M_{xy} = M_{xy_1} + M_{xy_2} + M_{xy_3} = \frac{Ed^3}{12(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{4F^2 G}{b_0 \frac{s_V}{d_y} + \frac{s_B}{d}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{2X_a F}{b_0}. \quad (6.10)$$

Podle Pflügera [15, 16] budeme předpokládat, že smykové přetvoření $(\partial u/\partial y + \partial v/\partial x)$ střednicové plochy izotropní desky je úměrné střednímu smykovému toku T_m .

Proto

$$T_m = \frac{Ed}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (6.11)$$

Ve výztuze působí smykový tok T_V , který je složen ze smykového toku při namáhání čistým smykem a namáhání kroucením. Jako T_x označíme smykový tok působící při složeném namáhání mezi výztuhami (obr. 10).

Potom z podmínky rovnosti platí

$$T_m \cdot b_0 = (T_x - T_V) s_B + T_x (b_0 - s_B)$$

čili

$$T_m = T_x - T_V \frac{s_B}{b_0}. \quad (6.12)$$

Dosadíme-li za T_m z rovnice (6.11), získáme

$$\frac{Ed}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = T_x - T_V \frac{s_B}{b_0}. \quad (6.13)$$

Nyní vyjádříme smykový tok T_V pomocí krouticích momentů.

Jelikož

$$\tau = \frac{M_K}{2Fd},$$

potom

$$\tau d = T_V = \frac{M_K}{2F}. \quad (6.14)$$

Dosadíme-li za M_K krouticí moment vyvozený kroucením dutého profilu M_{xy_2} a smykem horní desky M_{xy_3} , dostaneme

$$T_V = \frac{2FG}{\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - X_a. \quad (6.15)$$

Z rovnice (6.12) plyne

$$T_x = T_m + T_V \frac{s_B}{b_0}. \quad (6.12')$$

Dosadíme-li do (6.12') z rovnic (6.15) a (6.11), dostaneme

$$T_x = \frac{Ed}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{2s_B FG}{b_0 \left(\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d} \right)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{s_B}{b_0} X_a. \quad (6.16)$$

Dosadíme-li konečně za X_a do (6.16) z (6.8), dostaneme po úpravě

$$T_x = \frac{Ed}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{2s_B FG}{b_0 \left(\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d} \right)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{1 + \frac{s_B^2/d}{b_0 \left(\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d} \right)}}{1 + \frac{s_B^2/d}{b_0 \left(\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d} \right)}}. \quad (6.17)$$

Tento výraz pro jednoduchost píšme ve tvaru

$$T_x = A \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (6.17')$$

kde

$$A = \frac{Ed}{2(1+\mu)} \frac{1 + \frac{s_B^2/d}{b_0 \left(\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d} \right)}}{1 + \frac{s_B^2/d}{b_0 \left(\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d} \right)}}, \quad (6.18)$$

$$B = \frac{2s_B FG}{b_0 \left(\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d} \right)} \frac{1 + \frac{s_B^2/d}{b_0 \left(\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d} \right)}}{1 + \frac{s_B^2/d}{b_0 \left(\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d} \right)}}.$$

Tímto způsobem jsme určili síly $T_x = T_y$.

Dosadíme-li do výminek rovnováhy (5.6a–e), (5.7a–b), platných i v tomto případě, za všechny statické veličiny, dostaneme opět 3 parciální diferenciální rovnice, které nám popisují konstrukci desky s výtuhami vzdorujícími kroucení.

$$\alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \beta \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \gamma \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \delta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \varepsilon \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad (6.19)$$

$$\frac{d}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial v}{\partial x \partial y} \right) + \left(\int_T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - s_T \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) + \frac{A}{E} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{B}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad (6.20)$$

$$\frac{d}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{A}{E} \left(\frac{\partial u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{B}{E} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad (6.21)$$

$$\alpha = - \frac{Ed^3}{12(1-\mu^2)} - \varrho_T,$$

$$\beta = - 2\mu \frac{Ed^3}{12(1-\mu^2)} - 2 \frac{Ed^3}{12(1+\mu)} - \frac{4F^2 G}{b_0 \left(\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d} \right)} + \frac{2Fs_B}{b_0 \left(\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d} \right)},$$

$$\gamma = \frac{Ed^3}{12(1-\mu^2)},$$

$$\delta = E_{sT},$$

$$\varepsilon = \frac{\frac{2Fs_B}{d}}{b_0 \left(\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d} \right)} A.$$

Odvození jedné parciální diferenciální rovnice pouze pro průhyb w je obdobné jako u prvního případu. Rovněž řešení této rovnice bude v zásadě stejné. Pouze v okrajových podmínkách bude vztah pro reakci \bar{Q}_y (5.51) nahrazen výrazem

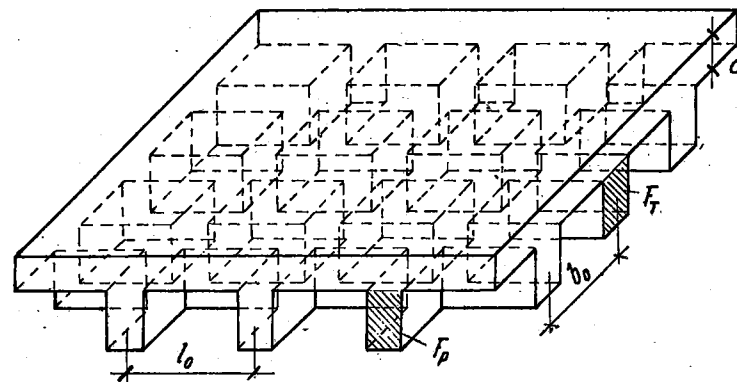
$$(\bar{Q}_y)_{(y=\pm b)} = -\frac{Ed}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) - \frac{4F^2 G}{b_0 \left(\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d} + \frac{s_B^2}{b_0 d} \right)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{2Fs_B}{b_0 \left(\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d} \right)} \left[A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right] = 0. \quad (6.22)$$

7. KONSTRUKCE S VÝZTUHAMÍ NETUHÝMI V KROUCENÍ PROBÍHAJÍCÍMI V OBOU SMĚRECH

7.1. Odvození diferenciálních rovnic

Předpoklady, kterých bylo užito při sestavování výsledných rovnic, jsou tytéž, jak uvedeno v kapitole 4 a 5.

Ze vzorců (5.5a–f) se nemění pouze vzorce pro N_x , M_x , $T_{xy} = T_{yx}$, a $M_{xy} = -M_{yx}$.



Obr. 11. Konstrukce s výztuhami netuhými v kroucení, probíhajícími v obou směrech.

Pro normální sílu N_y platí výraz obdobný vzorci (5.1a).

$$N_y = \int_{-d/2}^{+d/2} \sigma_y dy + \int_{F_P} \sigma_y^+ dF_P. \quad (7.1)$$

Moment M_y vyjádříme:

$$M_y = - \int_{-d/2}^{+d/2} \sigma_y z dz + \frac{1}{l_0} \int_{F_P} \sigma_y^+ z dF_P. \quad (7.2)$$

Potom při použití vztahů (5.2b), vzhledem ke vzorcům (5.4a–e) a jestliže

$$\sigma_y^+ = E\varepsilon_y^+, \quad (7.3)$$

kde

$$\varepsilon_y^+ = \frac{\partial v_z}{\partial y} \quad (7.4)$$

je deformace v příčném žebru, dostaneme

$$N_y = \frac{Ed}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + E \left(f_P \frac{\partial v}{\partial y} - s_P \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (7.5)$$

$$M_y = \frac{Ed^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - E \left(E_{sP} \frac{\partial v}{\partial y} - e_P \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (7.6)$$

Při použití výminek rovnováhy (5.6) a (5.7) a s použitím vztahů (5.5a, c, d, f) a (7.5), (7.6) můžeme napsat výsledné rovnice pro konstrukci s podélníky a příčníky netuhými v kroucení

$$-\frac{Ed^3}{12(1-\mu^2)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - e_P \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - e_T \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + E_{sT} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + E_{sP} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} = 0. \quad (7.7)$$

$$\frac{d}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{d}{2(1-\mu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{d}{1-\mu^2} + f_P \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - s_P \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0, \quad (7.8)$$

$$\frac{d}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{d}{2(1-\mu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(\frac{d}{1-\mu^2} + f_T \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - s_T \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0. \quad (7.9)$$

Z těchto tří rovnic (7.7) až (7.9), obdobnými operacemi jako v kapitole 5, lze obdržet jedinou diferenciální rovnici 8. řádu pro neznámou funkci w

$$a_1 \frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + a_2 \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial y^2} + a_3 \frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial y^4} + a_4 \frac{\partial^8 w}{\partial x^2 \partial y^6} + a_5 \frac{\partial^8 w}{\partial y^8} = 0 \quad (7.10)$$

a rovnice pro u a v

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} = b_1 \frac{\partial^6 w}{\partial y^6} + b_2 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} + b_3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} + b_4 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6}, \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial^5 v}{\partial y^5} = c_1 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + c_2 \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} + c_3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} + c_4 \frac{\partial^6 w}{\partial y^6}.$$

Součinitelé a_i, b_i, c_i mají zde tento význam

$$a_1 = d f_T i_T - d s_T^2,$$

$$a_2 = 2 \left[(1+\mu) f_T f_P - \frac{\mu d^2}{(1-\mu)(1-\mu^2)} \right] i_T + 2 d f_T j - 2(1+\mu) f_P s_T^2,$$

$$a_3 = d f_P i_T + 4 \left[(1+\mu) f_T f_P - \frac{\mu d^2}{(1-\mu)(1-\mu^2)} \right] j + d f_T i_P + 2 \frac{1+\mu}{1+\mu} d s_T s_P,$$

$$a_4 = 2 \left[(1+\mu) f_T f_P - \frac{\mu d^2}{(1-\mu)(1-\mu^2)} \right] i_P + 2 d f_P j - 2(1+\mu) f_T s_P^2,$$

$$a_5 = d f_P i_P - d s_T^2.$$

$$b_1 = \frac{d_1}{d_n}, \quad c_1 = \frac{e_1}{d_n},$$

$$b_2 = \frac{d_2}{d_n}, \quad c_2 = \frac{e_2}{d_n},$$

$$b_3 = \frac{d_3}{d_n}, \quad c_3 = \frac{e_3}{d_n},$$

$$b_4 = \frac{d_4}{d_n}, \quad c_4 = \frac{e_4}{d_n},$$

$$d_1 = g_2 d_{sT} (f_T i_T - s_T^2),$$

$$d_2 = s_T i_T (g_1^2 f_T f_P - g_2^2 d^2) + g_1 f_T s_P i_T - g_1 s_T^2 (f_T s_P + g_1 f_P s_T) + 2 g_2 d f_T s_T j,$$

$$d_3 = 2 s_T j (g_1^2 f_T f_P - g_2^2 d^2) + 2 g_1 f_P s_P j + g_2 d s_T (f_T i_P + g_1 s_T s_P),$$

$$d_4 = s_T i_T (g_1^2 f_T f_P - g_2^2 d^2) + f_T s_P (s_T s_P + g_1 f_T i_P) + g_1 f_P s_T^2 s_P,$$

$$e_1 = g_2 d s_P (f_P i_P - s_P^2),$$

$$e_2 = s_P i_P (g_1^2 f_T f_P - g_2^2 d^2) + g_1 f_P s_T i_P - g_1 s_P^2 (f_P s_T + g_1 f_T s_P) + 2 g_2 d f_P s_P j,$$

$$e_3 = 2 s_P j (g_1^2 f_T f_P - g_2^2 d^2) + 2 g_1 f_P s_T j + g_2 d s_P (f_P i_T + g_1 s_P s_T),$$

$$e_4 = s_P i_T (g_1^2 f_T f_P - g_2^2 d^2) + f_P s_T (s_T s_P + g_1 f_P i_T) + g_1 f_T s_P s_T,$$

$$d_n = s_T s_P [(1+g_1^2) f_T f_P - g_2^2 d^2] + g_1 [f_T s_P^2 + f_P s_T^2],$$

a g_1 a g_2 má stejný význam jako v kap. 5.2.

7.2. Okrajové podmínky konstrukce pro přímé řešení z rovnice (7.10)

Předpokládáme, že konstrukce je podél přímky $x = -l$ neposuvně, podél přímky $x = +l$ posuvně uložena a podél přímek $y = \pm b$ je volná (obr. 12).

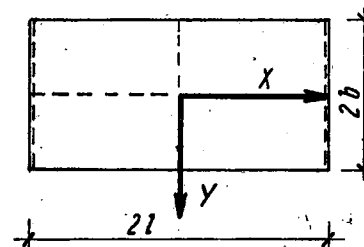
Rovnice (7.10), (7.11) popisují celý problém této konstrukce.

V případě zatížení desky nebude rovnice (7.10) homogenní, nýbrž na pravé straně bude funkce $p(x, y)$.

Z podmínek podepření podél $x = \pm l$ plynou rovnice (5.55), (5.56).

Z podmínek (5.55) a (5.56) plynou dále podmínky (5.55') a (5.56'). Rovněž budou platit pro tuto konstrukci podmínky (5.57) a (5.58).

Dosadíme-li do rovnic (5.57) a (5.58) z rovnic (7.5) a (7.6), dostaneme



Obr. 12. Uložení a rozměry uvažované konstrukce a souřadný systém.

$$\frac{Ed}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + E \left(f_P \frac{\partial v}{\partial y} - s_P \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (7.12)$$

$$\frac{Ed^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - E \left(s_P \frac{\partial v}{\partial y} - q_P \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (7.13)$$

Rovněž jako v kapitole 5.11 budou pro tuto konstrukci platit podmínky (5.59) a (5.60).

Pro jednoduchost dalších operací přepíšeme rovnice (7.7) až (7.9), uvažované pro zatíženou konstrukci, ve tvaru

$$\begin{aligned} (h+k)w^{40} + 2hw^{22} + (h+l)w^{04} - gu^{30} - mv^{03} &= p(x, y), \\ av^{20} + bu^{11} + nv^{02} - mw^{03} &= 0, \\ au^{02} + bv^{11} + du^{20} - gw^{30} &= 0, \end{aligned} \quad (7.14a-c)$$

kde součinitelé u funkcí posuvů obdobně příloze I jsou označeny písmeny a až n .

Derivujeme-li rovnici (7.14c) podle x , dostaneme

$$au^{12} + bv^{21} + du^{30} - gw^{40} = 0. \quad (7.15)$$

Z rovnice (7.14b), s přihlédnutím k rovnicím (5.55'), (5.56') a (5.60), plyne

$$av^{20} - mw^{03} = 0, \quad (7.16)$$

z toho

$$v^{20} = \frac{m}{a} w^{03}. \quad (7.17)$$

Derivujeme-li (7.17) podle y a dosadíme-li do rovnice (7.15), dostaneme

$$au^{12} + \frac{bm}{a} w^{04} + dn^{30} - gw^{40} = 0. \quad (7.18)$$

Vzhledem k (5.60) bude $u^{12} = 0$.

Potom

$$u^{30} = \frac{g}{d} w^{40} - \frac{mb}{ad} w^{04}. \quad (7.19)$$

Dosadíme-li za u^{30} z rovnice (7.19) do rovnice (7.14a) a s přihlédnutím k rovnici (5.56'), dostaneme

$$(h+k)w^{40} + (h+l)w^{04} - \frac{g^2}{d} w^{40} + \frac{bgm}{ad} w^{04} = p(x, y). \quad (7.20)$$

Rovnice (7.20) je třetí okrajovou podmínkou pro funkci w . K určení čtvrté okrajové podmínky pro $x = \pm l$ derivujeme rovnici (7.14a) dvakrát podle x a rovnici (7.14b) třikrát podle y ; tím dostaneme výrazy

$$(h+k)w^{60} + 2hw^{42} + (h+l)w^{24} - gu^{50} - mv^{23} = p^{20}(x, y), \quad (7.21)$$

$$av^{23} + bu^{14} + nv^{05} - mw^{06} = 0. \quad (7.22)$$

Z rovnice (7.22) při uvažování rovnic (5.43') a (5.49') dostaneme

$$w^{23} = \frac{m}{a} w^{06}. \quad (7.23)$$

Dosadíme-li ze (7.23) do (7.21), vyjádříme u^{50} .

$$u^{50} = \frac{(h+k)}{g} w^{60} + \frac{2h}{g} w^{42} + \frac{(h+l)}{g} w^{24} - \frac{m^2}{ga} w^{06} - \frac{p^{20}}{g}. \quad (7.24)$$

Derivujeme znovu rovnici (7.14b) dvakrát podle x a jednou podle y a rovnici (7.14c) třikrát podle y ; tím dostaneme

$$\begin{aligned} au^{32} + bv^{41} + du^{50} - gw^{60} &= 0, \\ av^{41} + bu^{32} + nv^{23} - mw^{24} &= 0. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Potom vyjádříme z obou rovnic v^{41} , čili

$$v^{41} = \frac{g}{b} w^{60} - \frac{a}{b} u^{32} - \frac{d}{b} u^{50}, \quad (7.26)$$

$$v^{41} = \frac{m}{a} w^{24} - \frac{b}{a} u^{32} - \frac{a}{n} v^{23}.$$

Abychom vyjádřili u^{32} , derivujeme (7.14c) jednou podle x a dvakrát dle y . Potom vzhledem k (5.60) získáme

$$u^{32} = \frac{g}{d} w^{42} - \frac{b}{d} v^{23} \quad (7.27)$$

dosazením do (7.27) za v^{23} z (7.23) je

$$u^{32} = \frac{g}{d} w^{42} - \frac{bm}{da} w^{06}. \quad (7.28)$$

Potom ze (7.26) a s použitím (7.24) dostaneme čtvrtou podmínku

$$\begin{aligned} w^{60} \left(\frac{g}{b} - \frac{d(h+k)}{bg} \right) + w^{42} \left(-\frac{ag}{bd} - \frac{2dh}{bg} + \frac{bg}{ad} \right) + w^{24} \left(-\frac{d(h+l)}{bg} - \frac{m}{a} \right) + \\ + w^{06} \left(-\frac{m}{d} + \frac{m^2 d}{abg} - \frac{b^2 m}{a^2 d} + \frac{mn}{a^2} \right) = p^{20} \frac{d}{bg}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Pro volné okraje $y = \pm b$ platí tyto vztahy:

$$\begin{aligned} (N_y)_{(y=\pm b)} &= 0, \\ (M_y)_{(y=\pm b)} &= 0, \\ (Q_y)_{(y=\pm b)} &= 0, \\ (T_{yx})_{(y=\pm b)} &= 0. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Prvé dvě z rovnic (7.30) máme vyjádřeny pomocí u, v, w v rovnicích (7.12), (7.13).

Třetí rovnici dostaneme ve tvaru

$$\bar{Q}_y = Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = -\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}. \quad (7.31)$$

Dosadíme-li do (7.31) $\partial M_y/\partial y$, $\partial M_{xy}/\partial x$, $\partial M_{yx}/\partial x$, vychází:

$$(\bar{Q}_y)_{(y=\pm b)} = -\left(\frac{Ed^3}{12(1-\mu^2)} + q_P\right) w^{03} + \frac{Ed^3}{12(1-\mu^2)} (2-\mu) w^{21} - E s_P v^{02} = 0. \quad (7.32)$$

Poslední z rovnic (7.30) dává podmínku

$$u^{01} = -v^{10}.$$

Vyjádříme pro snazší manipulaci koeficienty rovnic (7.12), (7.13), (7.32) písmeny.

Potom dostaneme soustavu rovnic:

$$m v^{01} + \mu c u^{10} - m w^{02} = 0, \quad (7.12')$$

$$(h+l) w^{02} + \mu h w^{20} - m v^{01} = 0, \quad (7.13')$$

$$(h+l) w^{03} + h(2-\mu) w^{21} - m v^{02} = 0. \quad (7.32')$$

Vyjádříme ze (7.13') a (7.32') v^{01} a v^{02} ; dostaneme výrazy

$$v^{01} = \frac{(h+l)}{m} w^{02} + \frac{\mu h}{m} w^{20}, \quad (7.34)$$

$$v^{02} = \frac{(h+l)}{m} w^{03} + \frac{h(2-\mu)}{m} w^{21}. \quad (7.35)$$

Dosadíme nyní (7.34) do (7.12'), z které vypočteme u^{10} .

$$u^{10} = \left(\frac{m^2 - n(h+l)}{\mu c m}\right) w^{02} - \frac{nh}{mc} w^{20}. \quad (7.36)$$

Použijme nyní vztahu (7.33) a výrazu (7.35) a přepíšme (7.14b) se zřetelem ke vztahu (7.36). Potom dostaneme podmínku ekvivalentní s podmínkou nulových posouvajících sil podél okraje

$$\left[w^{03} \left[(b-a) \frac{m^2 - n(h+l)}{\mu c m} + \frac{n(h+l)}{m} - m \right] + w^{21} \left[\frac{nh(2-\mu)}{m} - (b-a) \frac{nh}{cm} \right] \right] = 0. \quad (7.37)$$

Vezmeme-li opět vztah (7.33) a použijeme-li jej v rovnici (7.14c) se zřetelem k (7.34), (7.36), dostaneme rovnici

$$(b-a) \left(\frac{(h+l)}{m} w^{12} + \frac{\mu h}{m} w^{30} \right) + d \frac{m^2 - n(h+l)}{\mu c m} w^{12} - \frac{dnh}{cm} w^{30} - g w^{30} = 0.$$

Po úpravě zní:

$$\left[w^{30} \left[(b-a) \frac{\mu h}{m} - \frac{dnh}{mc} - g \right] + w^{12} \left[(b-a) \frac{(h+l)}{m} + d \frac{m^2 - n(h+l)}{\mu c m} \right] \right] = 0. \quad (7.38)$$

Dosadíme-li rovněž za u^{30} a v^{30} ze (7.36) a (7.35) do (7.14a), dostaneme po úpravě

$$\left[\left((h+k) + \frac{gnh}{mc} \right) w^{40} + \left[2h - h(2-\mu) \frac{gm}{\mu c} + \frac{ng(h+l)}{\mu c m} \right] w^{22} \right] = p(x, y). \quad (7.39)$$

Konečně budeme-li rovnici (7.14a) derivovat dvakrát podle y a potom do ní dosadíme za příslušnou derivaci funkce u z rovnice (7.33), obdržíme výraz

$$(h+l) w^{42} + 2h w^{24} + (h+l) w^{06} + g v^{41} - m v^{05} = p^{02}(x, y). \quad (7.40)$$

Dosadíme-li dále za v^{41} a v^{05} z rovnic (7.34), (7.35) získáme po úpravě rovnici:

$$\left[\frac{\mu hg}{m} w^{60} + \left((h+k) + \frac{g}{m} (h+l) \right) w^{42} + \left(2h - h(2-\mu) \right) w^{24} \right] = p^{02}(x, y). \quad (7.41)$$

Potom rovnice (5.55), (5.59), (7.20), (7.29), (7.37), (7.38), (7.39) a (7.41) jsou okrajovými podmínkami funkce w , za předpokladu prostého podepření podél $x = \pm l$ a a volných okrajů podél $y = \pm b$.

Pro případ desky uložené prostě po všech čtyřech stranách je postup hledání okrajových podmínek stejný a podmínky v hraně $y = \pm b$ vycházejí obdobně jako rovnice (5.55), (5.59), (7.20) a (7.29).

Význam jednotlivých písmen, užitých ve výrazech pro okrajové podmínky je:

$$a = \frac{Ed}{2(1+\mu)};$$

$$h = \frac{Ed^3}{12(1-\mu^2)};$$

$$b = \frac{Ed}{2(1-\mu)};$$

$$k = q_T;$$

$$c = \frac{Ed}{1-\mu^2};$$

$$l = q_P;$$

$$d = \left(\frac{Ed}{1-\mu^2} + E f_T \right);$$

$$m = E s_P;$$

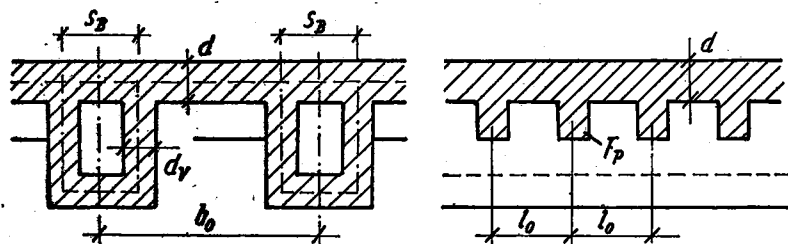
$$g = E s_T;$$

$$n = \left(\frac{Ed}{1-\mu^2} + E f_P \right).$$

8. KONSTRUKCE S VÝZTUHAMÍ PROBÍHAJÍCÍMI V OBOU SMĚRECH, PŘI ČEMŽ. PODÉLNÍKY JSOU TUHÉ A PŘÍČNÍKY NETUHÉ V KROUCENÍ

8.1. Odvození diferenciálních rovnic

Předpoklady, kterých je zde užito při sestavování výsledných rovnic, jsou tytéž, jako byly použity v předchozích kapitolách. Výrazy pro vnitřní síly jsou použity z kapitoly 6 a 7.



Obr. 13. Konstrukce s výztuhami probíhajícími v obou směrech, přičemž podélníky jsou tuhé a příčnky netuhé v kroucení.

$$N_x = \frac{Ed}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + E \left(f_T \frac{\partial u}{\partial x} - s_T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \quad (8.1) \quad (\text{viz 5.5a})$$

$$N_y = \frac{Ed}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + E \left(f_P \frac{\partial v}{\partial y} - s_P \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (8.2) \quad (\text{viz 7.5})$$

$$T_{xy} = T_{yx} = A \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (8.3) \quad (\text{viz 6.17'})$$

$$M_x = - \frac{Ed^3}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left(Es_T \frac{\partial u}{\partial x} - e_T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (8.4) \quad (\text{viz 5.5d})$$

$$M_y = \frac{Ed^3}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \left[Es_P \frac{\partial v}{\partial y} - e_P \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad (8.5) \quad (\text{viz 7.6})$$

$$M_{xy} = \left(\frac{Ed^3}{12(1 + \mu)} + \frac{4F^2 G}{b_0 \left(\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d} \right)} - \frac{2BFs_B}{b_0 d \left(\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d} \right)} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{2AFs_B}{b_0 d \left(\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d} \right)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (8.6) \quad (\text{viz 6.10 a další})$$

$$M_{yx} = - \frac{Ed^3}{12(1 + \mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (8.7) \quad (\text{viz 5.5f})$$

Dosadíme-li tyto výrazy do výminek rovnováhy (5.6a–c), (5.7a–b), dostaneme 3 diferenciální parciální rovnice popisující zvolený typ konstrukce.

$$\left(\frac{Ed}{1 - \mu^2} + Ef_T \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{E\mu d}{1 - \mu^2} + A \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - Es_T \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + B \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad (8.8)$$

$$\left(\frac{Ed}{1 - \mu^2} + Ef_P \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{E\mu d}{1 - \mu^2} + A \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - Es_P \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + B \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad (8.9)$$

$$- \left(\frac{Ed^3}{12(1 - \mu^2)} + e_T \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(- \frac{E\mu d^3}{12(1 - \mu^2)} - \frac{Ed^3}{12(1 + \mu)} + \frac{4F^2 G}{b_0 \left(\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d} \right)} - \frac{2BFs_B}{b_0 d \left(\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d} \right)} - \frac{E\mu d^3}{12(1 - \mu^2)} - \frac{Ed^3}{12(1 + \mu)} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \left(\frac{Ed^3}{12(1 - \mu^2)} + e_P \right) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + Es_T \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + Es_P \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{2AFs_B}{b_0 d \left(\frac{s_V}{d_V} - \frac{s_B}{d} \right)} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{2AFs_B}{b_0 d \left(\frac{s_V}{d_V} + \frac{s_B}{d} \right)} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = 0. \quad (8.10)$$

Odvození jedné parciální diferenciální rovnice pouze pro průhyb w je obdobné jako u prvního resp. třetího případu. Rovněž řešení této rovnice bude v zásadě stejné. Okrajové podmínky pro w obdrží se podobně jako v předchozím případě, uvaží-li se změna některých výchozích podmínek podle kap. 6.

9. ZÁVĚR

V předchozích kapitolách byl ukázán přesný způsob výpočtu trémových konstrukcí spojených s deskou, přičemž se dbalo všech vlivů i doposud zanedbávaného vlivu smykové tuhosti desky. Byly sledovány čtyři případy konstrukčního uspořádání.

Podnětem této práce byla snaha po vysvětlení neshod mezi experimentálně zjištěnými hodnotami napětí z deformací a hodnotami zjištěnými podle doposud používaných metod výpočtu.

Cílem práce bylo nalézt obecně platné přesné metody výpočtu těchto konstrukcí, odpovídající současnému stupni vývoje technických a přírodních věd.

Směr v logickém postupu odvození výchozích vztahů byl převzat z posledních prací Pflügera [13, 16] a Trenkse [14].

Řešení diferenciálních rovnic problému, navrhovaného Trenksem [14], však nelze prakticky obecně aplikovat pro velké potíže ve vyjadřování okrajových podmínek několikanásobnými integrály a bylo použito pouze pro řešení rovnice při rovnoměrném zatížení. Rozbor podle typů kořenů bikvadratické rovnice dává devět možností řešení v závislosti na rozměrových poměrech konstrukce. Pro jeden typ kořenů při rovnoměrném zatížení je naznačen postup řešení až k určení rovnice průhybové plochy. Pro jiné typy je řešení zcela obdobné.

Pro přímkové zatížení je ukázán postup řešení diferenciální rovnice jako nekonečného pásu na příkladě typu rovnice se čtyřnásobnými kořeny až k odvození rovnic pro určení příslušných konstant z okrajových podmínek.

Pro přímé řešení parciální diferenciální rovnice 8. řádu pro průhyb w při obecném zatížení je však nutno nalézt okrajové podmínky vyjádřené rovněž pouze v závislosti na průhybu w . Tento postup byl podrobně rozpracován a byly nalezeny výrazy pro 8 okrajových podmínek daných pouze v závislosti na w . Řešení samotné lze pak nejlépe provést variační metodou.

Bylo dokázáno, že odvozená obecná diferenciální rovnice pro výpočet trémových konstrukcí spojených s deskou zahrnuje v sobě jako speciální případy již dobře známá řešení různých konstrukcí, jako izotropní desky, ortotropní desky apod.

Tato práce je teoretickou přípravou a teoretickým podkladem k vyhotovení grafů nebo tabulek pro praktický výpočet s využitím moderních počítačích strojů.

Autoři jsou zavázáni a vyslovují svůj dík akademiku Václavu Daškovi, DrSc., za poskytnutí cenných rad a námětů v průběhu práce.

Rovněž autoři vyslovují svůj dík inž. Zd. Pirasovi za spolupráci při provedení některých matematických důkazů.

PŘÍLOHA I

Převedení tří parciálních diferenciálních rovnic (5.9), (5.10), (5.11) na jednu parciální diferenciální rovnici 8. řádu (5.23)

Výchozí rovnice jsou

$$-\frac{Ed^3}{12(1-\mu^2)} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] - e_T \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + E s_T \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (5.9)$$

$$\frac{Ed}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{Ed}{2(1-\mu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{Ed}{1-\mu^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad (5.10)$$

$$\frac{Ed}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{Ed}{2(1-\mu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left[\frac{Ed}{1-\mu^2} + E f_T \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - E s_T \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0. \quad (5.11)$$

Vyloučíme posuv u z rovnice (5.9). Pro přehlednost budeme používat označení derivací čísla u posuvů u , v a w , při čemž první číslo znamená derivace podle x , druhé číslo podle y . Součinitele u funkcí posuvů označíme si pro jednoduchost písmeny a až k , jejichž význam je uveden v kapitole 7.

Podle toho přeřazené rovnice (5.9) až (5.11) jsou:

$$a v^{20} + b u^{11} + c v^{02} = 0, \quad (5.10')$$

$$a u^{02} + b v^{11} + d u^{20} - g w^{30} = 0, \quad (5.11')$$

$$h(w^{40} + 2w^{22} + w^{04}) + k w^{40} - g u^{30} = 0. \quad (5.9')$$

Derivujeme-li rovnici (5.10) dvakrát podle x a třikrát podle y a rovnici (5.11) třikrát podle x a dvakrát podle y , dostaneme po úpravě

$$v^{43} = -\frac{b}{a} u^{34} - \frac{c}{a} v^{25}, \quad (5.13)$$

$$v^{43} = \frac{g}{b} w^{62} - \frac{a}{b} u^{34} - \frac{d}{b} u^{52}. \quad (5.14)$$

Z rovnice (5.9') plyne

$$u^{30} = \frac{h}{g} (w^{40} + 2w^{22} + w^{04}) + \frac{k}{g} w^{40}. \quad (5.12)$$

Sloučením (5.13) a (5.14) obdržíme po úpravě

$$\frac{ag}{b} w^{62} + \left(b - \frac{a^2}{b} \right) u^{34} - \frac{da}{b} u^{52} + c v^{25} = 0, \quad (5.15)$$

derivace rovnice (5.12) čtyřikrát podle y je

$$u^{34} = \frac{h}{g} (w^{44} + 2w^{26} + w^{08}) + \frac{k}{g} w^{44}$$

a derivací téže rovnice dvakrát podle x a y vychází

$$u^{52} = \frac{h}{g}(w^{62} + 2w^{44} + w^{26}) + \frac{k}{g}w^{62}.$$

Dosazením posledních dvou výrazů do rovnice (5.15) a po úpravě máme

$$w^{62} \left[\frac{ag}{b} - \frac{da(h+k)}{bg} \right] + w^{44} \left[\frac{(b^2 - a^2)(h+k)}{bg} - \frac{2adh}{bg} \right] + w^{26} \left[\frac{2(b^2 - a^2)h}{bg} - \frac{dah}{bg} \right] + \frac{(b^2 - a^2)h}{bg} w^{08} + cv^{25} = 0. \quad (5.16)$$

Budeme nyní derivovat rovnici (5.10') dvakrát podle x a jednou podle y , čímž po úpravě obdržíme

$$v^{23} = -\frac{a}{c}v^{41} - \frac{b}{c}u^{32} \quad (5.17)$$

derivací téže rovnice třikrát podle y po úpravě obdržíme

$$v^{05} = -\frac{a}{c}v^{23} - \frac{b}{c}u^{14}. \quad (5.18)$$

Dále derivujeme rovnici (5.11') třikrát podle x a posléze tutéž rovnici jednou podle x a dvakrát podle y .

Po úpravě vychází

$$v^{41} = \frac{g}{b}w^{60} - \frac{d}{b}u^{50} - \frac{a}{b}u^{32}, \quad (5.19)$$

$$u^{14} = \frac{g}{a}w^{42} - \frac{b}{a}v^{23} - \frac{d}{a}u^{32}. \quad (5.20)$$

Do rovnice (5.18) dosadíme postupně výrazy (5.17), (5.19) a (5.20), dále z rovnice (5.12') derivované dvakrát podle x výraz

$$u^{50} = \frac{h}{g}(w^{60} + 2w^{42} + w^{24}) + \frac{k}{g}w^{60}$$

a z téže rovnice derivované dvakrát podle y výraz

$$u^{32} = \frac{h}{g}(w^{42} + 2w^{24} + w^{06}) + \frac{k}{g}w^{42},$$

čímž obdržíme po úpravě:

$$v^{05} = w^{60} \left[\frac{a^2 g}{c b} - \frac{bg}{c^2} + \frac{bd(h+k)}{c^2 g} - \frac{a^2 d(h+k)}{c^2 bg} \right] + w^{42} \left[\frac{2b(dh+ah+ak)}{c^2 g} - \frac{(2a^2 dh + a^3 h + a^3 k)}{c^2 bg} - \frac{(b^3 h + b^3 k)}{c^2 ag} + \frac{bd(h+k)}{acg} - \frac{bg}{ac} \right] +$$

$$+ w^{24} \left[\frac{b(dh+4ck)}{c^2 g} - \frac{h(a^2 d + 2a^3)}{c^2 bg} - \frac{2b^3 h}{ac^2 g} + \frac{2bah}{acg} \right] + w^{06} \left[\frac{2abh}{c^2 g} + \frac{bdh}{acg} - \frac{b^3 h}{ac^2 g} - \frac{a^3 h}{c^2 bg} \right]. \quad (5.21)$$

Zderivujeme-li nyní tuto rovnici dvakrát podle x a dosadíme do rovnice (5.16), obdržíme konečně

$$w^{80} \left[\frac{a^2 g}{cb} - \frac{a^2 d(h+k)}{bcg} - \frac{bd(h+k)}{cg} - \frac{bg}{c} \right] + w^{62} \left[\frac{2ab(h+k)}{cg} - \frac{a^3(h+k)}{bcg} + \frac{2bdh}{cg} - \frac{b^3(h+k)}{acg} - \frac{2a^2 dh}{bcg} + \frac{bd(h+k)}{ag} - \frac{bg}{a} + \frac{ag}{b} - \frac{ad(h+k)}{bg} \right] + w^{44} \left[\frac{2abh}{cg} - \frac{2a^3 h}{bcg} - \frac{2b^3 h}{acg} - \frac{a^2 dh}{bcg} + \frac{2abh}{cg} + \frac{bdh}{cg} + \frac{2bdh}{cg} + \frac{(b^2 - a^2)(h+k)}{bg} - \frac{2adh}{cg} \right] + w^{26} \left[\frac{2abh}{cg} - \frac{a^3 h}{bcg} - \frac{b^3 h}{acg} + \frac{bdh}{ag} + \frac{2(b^2 - a^2)h}{bg} - \frac{adh}{bg} \right] + w^{08} \frac{(b^2 - a^2)h}{bg} = 0. \quad (5.22)$$

Dosadíme-li do této rovnice opět za pomocné součinitele a, b, c, d, g, h, k , jejich skutečné hodnoty, dostaneme po úpravě konečný tvar diferenciální parciální lineární homogenní rovnice 8. řádu.

$$a_1 \frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + a_2 \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial y^2} + a_3 \frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial y^4} + a_4 \frac{\partial^8 w}{\partial x^2 \partial y^6} + a_5 \frac{\partial^8 w}{\partial y^8} = 0, \quad (5.23)$$

kteřou je daný problém popsán v závislosti pouze na svislých posuvech (průhybech) konstrukce w .

PŘÍLOHA II

Řešení homogenní rovnice (5.38)

$$\frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + 4 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6 \partial y^2} + 6 \frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial y^4} + 4 \frac{\partial^8 w}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{\partial^8 w}{\partial y^8} = 0$$

hledáme ve tvaru

$$w_0(x, y) = X(x), \quad Y(y), \quad (5.39)$$

kde $X(x)$ je pouze funkcí x , a $Y(y)$ je pouze funkcí y .

Dosazením do rovnice (5.38) dostaneme

$$X^{VIII} Y + 4 X^{VI} Y^{II} + 6 X^{IV} Y^{IV} + 4 X^{II} Y^{VI} + X Y^{VIII} = 0 \quad (5.40)$$

a po úpravě

$$\frac{X^{VIII}}{X} + 4 \frac{X^{VI}}{X} \frac{Y^{II}}{Y} + 6 \frac{X^{IV}}{XY} + 4 \frac{X^{II}}{X} \frac{Y^{VI}}{Y} + \frac{Y^{VIII}}{Y} = 0.$$

Aplikujeme-li metodu Filona-Rivera (předpoklady oprávněného použití této metody jsou uvedeny v příloze III), obdržíme postupně první derivaci celé rovnice podle y

$$4 \frac{X^{VI}}{X} \left(\frac{Y^{II}}{Y}\right)' + 6 \frac{X^{IV}}{X} \left(\frac{Y^{IV}}{Y}\right)' + 4 \frac{X^{II}}{X} \left(\frac{Y^{VI}}{Y}\right)' + \left(\frac{Y^{VIII}}{Y}\right)' = 0$$

a po úpravě

$$4 \frac{X^{VI}}{X} + 6 \frac{X^{IV}}{X} \frac{(Y^{IV}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'} + 4 \frac{X^{II}}{X} \frac{(Y^{VI}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'} + \frac{(Y^{VIII}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'} = 0.$$

Další derivací obdržíme

$$6 \frac{X^{IV}}{X} \frac{((Y^{IV}/Y)')'}{((Y^{II}/Y)')} + 4 \frac{X^{II}}{X} \frac{((Y^{VI}/Y)')'}{((Y^{II}/Y)')} + \frac{((Y^{VIII}/Y)')'}{((Y^{II}/Y)')} = 0$$

a po úpravě

$$6 \frac{X^{IV}}{X} + 4 \frac{X^{II}}{X} \frac{\left(\frac{(Y^{VI}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'}{\left(\frac{(Y^{IV}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'} + \frac{\left(\frac{(Y^{VIII}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'}{\left(\frac{(Y^{IV}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'} = 0.$$

Další derivací vychází

$$4 \frac{X^{II}}{X} \frac{\left(\frac{\left(\frac{(Y^{VI}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'}{\left(\frac{(Y^{IV}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'}\right)'}{\left(\frac{(Y^{IV}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'} + \frac{\left(\frac{\left(\frac{(Y^{VIII}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'}{\left(\frac{(Y^{IV}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'}\right)'}{\left(\frac{(Y^{IV}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'} = 0$$

a po úpravě

$$4 \frac{X^{II}}{X} = \frac{\left(\frac{\left(\frac{(Y^{VIII}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'}{\left(\frac{(Y^{IV}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'}\right)'}{\left(\frac{(Y^{IV}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'} = 0,$$

neboli, protože rovnost musí být splněna pro libovolné x i y , platí

$$4 \frac{X^{II}}{X} = - \frac{K_1(y)}{K_2(y)} = \text{konst} = - 4\lambda^2.$$

Z toho

$$X'' = - \lambda^2 X$$

a po integraci

$$X(x) = D_1 \cos \lambda x + D_2 \sin \lambda x. \quad (5.41)$$

Vyjádříme nyní další derivace $X(x)$:

$$\begin{aligned} X^{II} &= - \lambda^2 X, \\ X^{VI} &= - \lambda^2 X^{II} = \lambda^4 X, \\ X^{VI} &= - \lambda^2 X^{IV} = - \lambda^6 X, \\ X^{VIII} &= - \lambda^2 X^{VI} = \lambda^8 X. \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice (5.40) dostaneme

$$X \lambda^8 Y - 4 X \lambda^6 Y^{II} + 6 X \lambda^4 Y^{IV} - 4 X \lambda^2 Y^{VI} + X Y^{VIII} = 0.$$

Protože $X(x)$ není identicky rovno nule, upravíme tuto rovnici na tvar

$$\lambda^8 Y - 4 \lambda^6 Y^{II} + 6 \lambda^4 Y^{IV} - 4 \lambda^2 Y^{VI} + Y^{VIII} = 0, \quad (5.42)$$

což je obyčejná diferenciální rovnice 8. řádu s konstantními součiniteli pro neznámou funkci $Y(y)$.

PŘÍLOHA III

Odvození předpokladů oprávněného použití metody Filona pro řešení homogenní rovnice (5.38)

Hledáme třídu funkcí vyhovující diferenciální rovnici

$$a_0 X^{VIII} Y + a_1 X^{VI} Y^{II} + a_2 X^{IV} Y^{IV} + a_3 X^{II} Y^{VI} + a_4 X Y^{VIII} = 0,$$

kde a_i jsou pozitivní konstanty, X je funkcí x a Y funkcí y .

Předpoklad 1

Jako základ vezměme prostor C_{10} , prostor spojitých funkcí na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, které mají v tomto intervalu 10 spojitých derivací Y^I, \dots, Y^X (tj. pro každou derivaci $Y^{(i)}$ existuje řada disjunktních intervalů $\langle \alpha_i^{(n)}, \beta_i^{(n)} \rangle$ tak, že v těchto intervalech je $Y^{(i)} \neq 0$), čili $Y^{(i)} = 0$ nanejvýš pouze ve spočetném počtu bodů intervalu $\langle a, b \rangle$ pro $i = 1, \dots, 9$. Y^X může být konstantní. Ježto funkce Y jsou spojitě na uzavřeném intervalu, platí:

Věta 1. Funkce Y jsou v intervalu $\langle a, b \rangle$ omezené ([15], věta 127).

Předpoklad 2

Protože funkce Y mají 10 spojitých derivací v $\langle a, b \rangle$, existuje pouze spočetné množství bodů $y \in \langle a, b \rangle$ takových, že $Y = 0$. Je tedy interval $\langle a, b \rangle$ rozdělen na řadu disjunktních intervalů $\langle a_i, b_i \rangle$. Vezměme jeden z nich — $\langle a_1, b_1 \rangle$. Zde $Y \neq 0$. Nechť v tomto intervalu též $X \neq 0$.

Pak

$$a_0 \frac{X^{VIII}}{X} + a_1 \frac{X^{VI}}{X} \frac{Y^{II}}{Y} + a_2 \frac{X^{IV}}{X} \frac{Y^{IV}}{Y} + a_3 \frac{X^{II}}{X} \frac{Y^{VI}}{Y} + a_4 \frac{Y^{VIII}}{Y} = 0. \quad (2)$$

Vzhledem k předpokladu 1 existuje interval $\langle a_2, b_2 \rangle \subset \langle a_1, b_1 \rangle$ takový, že všechny podíly $Y^{II}/Y, Y^{IV}/Y, Y^{VI}/Y$ a Y^{VIII}/Y budou různé od nuly. V případě, že bychom chtěli zeslabit předpoklad 1 a připustili možnost nulových podílů, pak buď: 1. všechny podíly jsou nulové, z čehož $a_0(X^{VIII}/X) = 0$; jsou-li a_0, X nenulové, plyne z předchozího, že $X^{VIII} = 0$, nebo 2. pouze některé podíly jsou nulové a na tom je založen další postup.

Pak

Věta 2. Mějme funkce $f(y)$ a $g(y)$ spojitě v intervalu $\langle a_2, b_2 \rangle$, které mají v tomto intervalu spojitě derivace alespoň 2. řádu. Nechť pro všechna $y \in \langle a_2, b_2 \rangle$ je $g(y) = 0$. Pak existuje derivace podílu $(f(y)/g(y))$ v intervalu $\langle a_2, b_2 \rangle$ a derivace zleva resp. zprava v bodech a_2 resp. b_2 ([15], věta 124).

Ježto $g(y) = Y \neq 0$, v intervalu $\langle a_2, b_2 \rangle$ lze psát

$$\frac{f(y)}{g(y)} = \frac{Y^{(i)}}{Y} = F_i(y), \quad i = 2, 4, 6, 8.$$

Pak nutno dokázat větu

Věta 3. Funkce $F_i(y)$ jsou v intervalu $\langle a_2, b_2 \rangle$ funkcí y , tj. v intervalu $\langle a_2, b_2 \rangle$ existuje pouze spočetně bodů y takových, že $F_i'(y) = 0$. Abychom mohli tuto větu dokázat, musíme zúžit obor funkcí C_{10} .

Předpoklad 3

Uvažujeme množinu $\mathfrak{M} \subset C_{10}$ funkcí s vlastnostmi C_{10} a takových, že v intervalu $\langle a_2, b_2 \rangle$ jsou podíly $Y^{II}/Y, Y^{IV}/Y, Y^{VI}/Y$ a Y^{VIII}/Y nekonstantními funkcemi y .

Potom funkce $F_i(y)$ z věty 3 mají na množině \mathfrak{M} požadované vlastnosti, a tím je věta dokázána.

Existuje tedy interval $\langle a_3, b_3 \rangle \subset \langle a_2, b_2 \rangle$ tak, že funkce $(Y^{II}/Y)', (Y^{IV}/Y)', (Y^{VI}/Y)'$ a $(Y^{VIII}/Y)'$ jsou v tomto intervalu nenulové.

Pak derivováním rovnice (2) podle y máme

$$a_1 \frac{X^{VI}}{X} \left(\frac{Y^{II}}{Y} \right)' + a_2 \frac{X^{IV}}{X} \left(\frac{Y^{IV}}{Y} \right)' + a_3 \frac{X^{II}}{X} \left(\frac{Y^{VI}}{Y} \right)' + a_4 \left(\frac{Y^{VIII}}{Y} \right)' = 0. \quad (3)$$

V intervalu $\langle a_3, b_3 \rangle$ jsou derivované podíly současně nenulové a z rovnice (3) dostaneme

$$a_1 \frac{X^{VI}}{X} + a_2 \frac{X^{IV}}{X} \frac{(Y^{IV}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'} + a_3 \frac{X^{II}}{X} \frac{(Y^{VI}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'} + a_4 \frac{(Y^{VIII}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'} = 0, \quad (4)$$

kde podíly derivací podílů jsou spojitě nenulové a jmenovatel je též v intervalu $\langle a_3, b_3 \rangle$ od nuly různý. Pak podle věty 2 jsou podíly derivovatelné, a tedy

$$a_2 = \frac{X^{IV}}{X} \left(\frac{(Y^{IV}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'} \right)' + a_3 \frac{X^{II}}{X} \left(\frac{(Y^{VI}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'} \right)' + a_4 \left(\frac{(Y^{VIII}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'} \right)' = 0 \quad (5)$$

má smysl v intervalu $\langle a_3, b_3 \rangle$.

Předpoklad 4

Uvažujeme množinu $\mathfrak{M}^* \subset \mathfrak{M}$ takovou, v níž by existoval interval $\langle a_4, b_4 \rangle \subset \langle a_3, b_3 \rangle$ tak, aby pro všechna $y \in \langle a_4, b_4 \rangle$ byly funkce

$$f_i(y) = \frac{(Y^{(i)}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}, \quad i = 4, 6, 8$$

funkcí y , tj. aby bylo spočetně bodů, v nichž by $f_i'(y) = 0$ a aby $f_i'(y)$ byly zde spojitě. Pak lze vybrat interval $\langle a_5, b_5 \rangle$ tak, že $f_i'(y) = 0$ pro všechna $y \in \langle a_5, b_5 \rangle$ a jsou zde spojitě.

Pak z rovnice (5)

$$a_2 \frac{X^{IV}}{X} + a_3 \frac{X^{II}}{X} \frac{\left(\frac{(Y^{VI}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'}{\left(\frac{(Y^{IV}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'} + a_4 \frac{\left(\frac{(Y^{VIII}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'}{\left(\frac{(Y^{IV}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'} = 0, \quad (6)$$

kde čitatelé i jmenovatele zlomků jsou v $\langle a_5, b_5 \rangle$ nenulové spojité. Pak opět podle věty 2 lze rovnici (6) derivovat

$$a_3 \frac{X^{II}}{X} \frac{\left(\frac{\left(\frac{(Y^{VI}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'}{\left(\frac{(Y^{IV}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'}\right)'}{\left(\frac{(Y^{IV}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'} + a_4 \frac{\left(\frac{\left(\frac{(Y^{VIII}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'}{\left(\frac{(Y^{IV}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'}\right)'}{\left(\frac{(Y^{IV}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'} = 0. \quad (7)$$

Předpoklad 5

Uvažujeme podmnožinu \mathfrak{M}^{**} množiny \mathfrak{M}^* takovou, aby existoval $\langle a_6, b_6 \rangle \subset \langle a_5, b_5 \rangle$ tak, že pro funkce $f_i(y)$ z předpokladu 4 platí, že

$$F(y) = \frac{f'_6(y)}{f'_4(y)}$$

je v intervalu $\langle a_6, b_6 \rangle$ nekonstantní.

Stačí, existuje-li bod y_0 tak, aby $F'(y_0) \neq 0$. Pak lze z rovnice (7) dostat vztah

$$a_3 \frac{X^{II}}{X} + a_4 \frac{\left(\frac{\left(\frac{(Y^{VIII}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'}{\left(\frac{(Y^{IV}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'}\right)'}{\left(\frac{(Y^{IV}/Y)'}{(Y^{II}/Y)'}\right)'} = 0. \quad (8)$$

Podle předpokladu 5 má druhý člen levé strany rovnice (8) smysl aspoň pro jedno $y_0 \in \langle a_6, b_6 \rangle$.

Odtud pak plyne pro $y = y_0$

$$a_3 \frac{X^{II}}{X} + a_4 K = 0 \Rightarrow a_3 \frac{X^{II}}{X} = -a_4 K = A.$$

Označme

$$\frac{A}{a_3} = -\lambda^2.$$

Máme

$$\frac{X^{II}}{X} = -\lambda^2.$$

Ježto $X \neq 0$, máme

$$\begin{aligned} X'' &= -\lambda^2 X, \\ \alpha^2 + \lambda^2 &= 0, \\ \alpha &= \pm i\lambda, \\ X(x) &= K_1 \cos \lambda x + K_2 \sin \lambda x, \\ X^{II} &= -\lambda^2 X, \\ X^{IV} &= -\lambda^2 X^{II} = (-\lambda^2)(-\lambda^2) X = \lambda^4 X, \\ X^{VI} &= \lambda^4 X'' = \lambda^4(-\lambda^2) X = -\lambda^6 X, \\ X^{VIII} &= -\lambda^6 X'' = (-\lambda^6)(-\lambda^2) X = \lambda^8 X. \end{aligned}$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do (1), máme

$$a_0 \lambda^8 X Y - \lambda^6 a_1 X Y'' + \lambda^4 a_2 X Y^{IV} - \lambda^2 a_3 X Y^{VI} + a_4 X Y^{VIII} = 0.$$

Tedy

$$X(a_4 Y^{VIII} - a_3 \lambda^2 Y^{VI} + a_2 \lambda^4 Y^{IV} - a_1 \lambda^6 Y^{II} + a_0 \lambda^8 Y) = 0.$$

Ježto $X \neq 0$ je

$$a_4 Y^{VIII} - a_3 \lambda^2 Y^{VI} + a_2 \lambda^4 Y^{IV} - a_1 \lambda^6 Y^{II} + a_0 \lambda^8 Y = 0.$$

Funkce Y patřící do množiny \mathfrak{M}^{**} mají tyto vlastnosti:

1. mají 10 spojitých derivací v $\langle a, b \rangle$;
2. existuje interval $\langle a_1, b_1 \rangle \subset \langle a, b \rangle$, v němž podíly Y^{II}/Y , Y^{IV}/Y , Y^{VI}/Y a Y^{VIII}/Y jsou spojitými nekonstantními funkcemi y ;
3. Existuje interval $\langle a_2, b_2 \rangle \subset \langle a_1, b_1 \rangle$, v němž funkce

$$f_i(y) = \frac{(Y/Y^{(i)})'}{(Y^{II}/Y)'}, \quad i = 4, 6, 8$$

jsou spojitými funkcemi y ;

4. existuje bod $y_0 \in \langle a_2, b_2 \rangle$ takový, že funkce $f_i(y)$ z 3 platí

$$F'(y_0) \neq 0,$$

kde

$$F(y) = \frac{f'_6(y)}{f'_4(y)}.$$

PŘÍLOHA IV

Řešení bikvadratické rovnice (5.43)

1. Všechny čtyři kořeny reálné

a) Všechny čtyři kořeny různé

Označíme-li hodnoty kořenů $\delta_1^a, \delta_2^a, \delta_3^a, \delta_4^a$, obdržíme

$$\gamma_{1,2} = \pm \sqrt{\delta_1^a} = \pm g_1,$$

$$\gamma_{3,4} = \pm \sqrt{\delta_2^a} = \pm g_2,$$

$$\gamma_{5,6} = \pm \sqrt{\delta_3^a} = \pm g_3,$$

$$\gamma_{7,8} = \pm \sqrt{\delta_4^a} = \pm g_4,$$

a tedy

$$Y(y) = C_1 e^{g_1 y} + C_2 e^{-g_1 y} + C_3 e^{g_2 y} + C_4 e^{-g_2 y} + C_5 e^{g_3 y} + C_6 e^{-g_3 y} + C_7 e^{g_4 y} + C_8 e^{-g_4 y},$$

čili

$$Y(y) = C_1 \operatorname{ch} g_1 y + C_2 \operatorname{sh} g_1 y + C_3 \operatorname{ch} g_2 y + C_4 \operatorname{sh} g_2 y + C_5 \operatorname{ch} g_3 y + C_6 \operatorname{sh} g_3 y + C_7 \operatorname{ch} g_4 y + C_8 \operatorname{sh} g_4 y.$$

b) Dva kořeny různé, jeden dvojný

Označíme-li hodnoty kořenů $\delta_1^b, \delta_2^b, \delta_{3,4}^b$, dostaneme

$$\gamma_{1,2} = \pm \sqrt{\delta_1^b} = \pm g_1,$$

$$\gamma_{3,4} = \pm \sqrt{\delta_2^b} = \pm g_2,$$

$$\gamma_{5,6,7,8} = \pm \sqrt{\delta_{3,4}^b} = \pm g_3,$$

a tedy

$$Y(y) = C_1 \operatorname{ch} g_1 y + C_2 \operatorname{sh} g_1 y + C_3 \operatorname{ch} g_2 y + C_4 \operatorname{sh} g_2 y + C_5 \operatorname{ch} g_3 y + C_6 \operatorname{sh} g_3 y + C_7 y \operatorname{ch} g_3 y + C_8 y \operatorname{sh} g_3 y.$$

c) Dva kořeny dvojně

S označením hodnot kořenů $\delta_{1,2}^c, \delta_{3,4}^c$ je

$$\gamma_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\delta_{1,2}^c} = \pm g_1,$$

$$\gamma_{5,6,7,8} = \pm \sqrt{\delta_{3,4}^c} = \pm g_2$$

a dále

$$Y(y) = C_1 \operatorname{ch} g_1 y + C_2 \operatorname{sh} g_1 y + C_3 y \operatorname{ch} g_1 y + C_4 y \operatorname{sh} g_1 y + C_5 \operatorname{ch} g_2 y + C_6 \operatorname{sh} g_2 y + C_7 y \operatorname{ch} g_2 y + C_8 y \operatorname{sh} g_2 y.$$

d) Jeden kořen čtyřnásobný

Jeho hodnota je $\delta_{1,2,3,4}^d$; pak

$$\gamma_{1,2,3,4} = + \sqrt{\delta_{1,2,3,4}^d} = + g_1,$$

$$\gamma_{5,6,7,8} = - \sqrt{\delta_{5,6,7,8}^d} = - g_1,$$

a

$$Y(y) = C_1 \operatorname{ch} g_1 y + C_2 \operatorname{sh} g_1 y + C_3 y \operatorname{ch} g_1 y + C_4 y \operatorname{sh} g_1 y + C_5 y^2 \operatorname{ch} g_1 y + C_6 y^2 \operatorname{sh} g_1 y + C_7 y^3 \operatorname{ch} g_1 y + C_8 y^3 \operatorname{sh} g_1 y.$$

e) Jeden kořen jednoduchý, jeden trojnásobný

S označením hodnot kořenů $\delta_1^e, \delta_{2,3,4}^e$ je

$$\gamma_{1,2} = \pm \sqrt{\delta_1^e} = \pm g_1,$$

$$\gamma_{3,4,5,6,7,8} = \pm \sqrt{\delta_{2,3,4}^e} = \pm g_2$$

a

$$Y(y) = C_1 \operatorname{ch} g_1 y + C_2 \operatorname{sh} g_1 y + C_3 \operatorname{ch} g_2 y + C_4 \operatorname{sh} g_2 y + C_5 y \operatorname{ch} g_2 y + C_6 y \operatorname{sh} g_2 y + C_7 y^2 \operatorname{ch} g_2 y + C_8 y^2 \operatorname{sh} g_2 y.$$

2. Dva kořeny reálné a dva kořeny komplexní

f) Dva kořeny reálné různé a dva kořeny komplexní

Hodnoty kořenů jsou $\delta_1^f, \delta_2^f, (o + ip), (o - ip)$.

$$\gamma_{1,2} = \pm \sqrt{\delta_1^f} = \pm g_1,$$

$$\gamma_{3,4} = \pm \sqrt{\delta_2^f} = \pm g_2,$$

$$\gamma_{5,6} = \pm \sqrt{(o + ip)} = \pm \sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) = \pm (\tau + iX),$$

$$\gamma_{7,8} = \pm \sqrt{(o - ip)} = \pm \sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2} \right) = \pm (\tau - iX).$$

Potom

$$Y(y) = C_1 \operatorname{ch} g_1 y + C_2 \operatorname{sh} g_1 y + C_3 \operatorname{ch} g_2 y + C_4 \operatorname{sh} g_2 y + e^{\tau y} (C_5 \cos Xy + C_6 \sin Xy) + e^{-\tau y} (C_7 \cos Xy + C_8 \sin Xy),$$

čili

$$Y(y) = C_1 \operatorname{ch} g_1 y + C_2 \operatorname{sh} g_1 y + C_3 \operatorname{ch} g_2 y + C_4 \operatorname{sh} g_2 y + \cos Xy (C_5 \operatorname{ch} \tau y + C_6 \operatorname{sh} \tau y) + \sin Xy (C_7 \operatorname{ch} \tau y + C_8 \operatorname{sh} \tau y).$$

g) Jeden kořen reálný dvojný, dva kořeny komplexní

s označením kořenů

$$\delta_{1,2}^g, (o + ip), (o - ip)$$

je

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2,3,4} &= \pm \sqrt{\delta_{1,2}^2} = \pm g_1, \\ \gamma_{5,6} &= \pm (\tau + iX), \\ \gamma_{7,8} &= \pm (\tau - iX) \end{aligned}$$

a

$$Y(y) = C_1 \operatorname{ch} g_1 y + C_2 \operatorname{sh} g_1 y + C_3 y \operatorname{ch} g_1 y + C_4 y \operatorname{sh} g_1 y + e^{-\gamma y} (C_5 \cos Xy + C_6 \sin Xy) + e^{-\gamma y} (C_7 \cos Xy + C_8 \sin Xy).$$

3. Všechny čtyři kořeny komplexní

h) Dva různé, komplexně sdružené kořeny

S označením

$$(o + ip), (o - ip), (s + it), (s - it)$$

je

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2} &= \pm \sqrt{o + ip} = \pm (\tau + iX), \\ \gamma_{3,4} &= \pm \sqrt{o - ip} = \pm (\tau - iX), \\ \gamma_{5,6} &= \pm \sqrt{s + it} = \pm (\gamma + i\Psi), \\ \gamma_{7,8} &= \pm \sqrt{s - it} = \pm (\gamma - i\Psi). \end{aligned}$$

a

$$Y(y) = C_1 e^{(\tau+iX)y} + C_2 e^{-(\tau+iX)y} + C_3 e^{(\tau-iX)y} + C_4 e^{-(\tau-iX)y} + C_5 e^{(\gamma+i\Psi)y} + C_6 e^{-(\gamma+i\Psi)y} + C_7 e^{(\gamma-i\Psi)y} + C_8 e^{-(\gamma-i\Psi)y}.$$

čili

$$Y(y) = \cos Xy (C_1 \operatorname{ch} \tau y + C_2 \operatorname{sh} \tau y) + \sin Xy (C_3 \operatorname{ch} \tau y + C_4 \operatorname{sh} \tau y) + \cos \Psi y (C_5 \operatorname{ch} \gamma y + C_6 \operatorname{sh} \gamma y) + \sin \Psi y (C_7 \operatorname{ch} \gamma y + C_8 \operatorname{sh} \gamma y).$$

i) Jeden kořen dvojný, komplexně sdružený

Jeho hodnota je

$$(o \pm ip)_{1,2},$$

pak

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2,3,4} &= \pm \sqrt{(o + ip)_{1,2}} = \pm (\tau + iX)_{1,2}, \\ \gamma_{5,6,7,8} &= \pm \sqrt{(o - ip)_{1,2}} = \pm (\tau - iX)_{1,2}. \end{aligned}$$

a

$$Y(y) = \cos Xy (C_1 \operatorname{ch} \tau y + C_2 \operatorname{sh} \tau y) + \sin Xy (C_3 \operatorname{ch} \tau y + C_4 \operatorname{sh} \tau y) + y \cos Xy (C_5 \operatorname{ch} \tau y + C_6 \operatorname{sh} \tau y) + y \sin Xy (C_7 \operatorname{ch} \tau y + C_8 \operatorname{sh} \tau y).$$

V tabulce I jsou seřazeny tvary jednoho členu řady výsledné funkce w_0 , vyjádřené podle rovnice (5.39) pro jednotlivé případy řešení bikvadratické rovnice pro obecné zatížení, v tabulce II pro zatížení symetrické resp. antisymetrické.

PŘÍLOHA V

Určení konstant $A_n - D_n$ rovnice (5.50) z okrajových podmínek daných vztahy (5.51)

Rovnice (5.50) zní

$$w(x, y) = \sum_1^{\infty} \cos \lambda_n x (P_n + A_n \operatorname{ch} \lambda_n y + B_n y \operatorname{sh} \lambda_n y + C_n y^2 \operatorname{ch} \lambda_n y + D_n y^3 \operatorname{sh} \lambda_n y). \quad (5.50)$$

Podle (5.27) platí

$$s_T \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -p + i_T \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2j \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + j \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}. \quad (5.27a)$$

Dosadíme-li za p podle vztahu (5.49) a za příslušné derivace w z rovnice (5.50), dostaneme

$$\begin{aligned} s_T \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= \sum_1^{\infty} \cos \lambda_n x \left[\left(\frac{a_1}{a_6} + i_T \right) \lambda_n^4 P_n + \operatorname{ch} \lambda_n y (i_T \lambda_n^4 A_n + 8j \lambda_n^2 C_n + \right. \\ &\quad \left. + 24j \lambda_n D_n) + y \operatorname{sh} \lambda_n y (i_T \lambda_n^4 B_n + 24j \lambda_n^2 D_n) + \right. \\ &\quad \left. + y^2 \operatorname{ch} \lambda_n y (i_T \lambda_n^4 C_n) + y^3 \operatorname{sh} \lambda_n y (i_T \lambda_n^4 D_n) \right]. \end{aligned} \quad (5.27b)$$

Abychom obdrželi výrazy $s_T (\partial u / \partial x)$ a $s_T (\partial u / \partial y)$, které dále budeme potřebovat, musíme rovnici (5.27b) postupně dvakrát a třikrát integrovat podle x a jednou derivovat podle y .

Podle rovnice (5.25) platí

$$s_T \frac{\partial^5 v}{\partial y^5} = b_1 \frac{\partial^6 w}{\partial x^5} + b_2 \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} + b_3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} + b_4 \frac{\partial^6 w}{\partial y^6} + b_5 \frac{d^2 p}{dx^2}$$

a po dosazení $p(x)$

$$s_T \frac{\partial^5 v}{\partial y^5} = b_1 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + b_2 \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} + b_3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} + b_4 \frac{\partial^6 w}{\partial y^6} + b_5 \frac{a_1}{a_6} \sum_1^{\infty} \lambda_n^6 P_n \cos \lambda_n x.$$

Součinitelé $b_1 - b_4$ jsou s_T násobky výrazů daných rovnicí (5.26a - d). Součinitel b_5 je

$$b_5 = - \frac{(1 - \mu^2) g_2 \bar{f}_T}{g_1 \bar{f}_P}. \quad (5.26e)$$

Abychom obdrželi výrazy $s_T (\partial v / \partial y)$ a $s_T (\partial v / \partial x)$, musíme rovnici (5.25a) postupně čtyřikrát a pětkrát integrovat podle y a jednou derivovat podle x .

Integrační konstanty vystupující v těchto vztazích jsou vesměs rovny nule, jak dále dokázáno na případu přímkového zatížení.

Pro $x = \pm l$ musí být $M_x = N_x = 0$, což je splněno volbou funkce x automaticky.

Pro $y = \pm b$ musí být $M_y = Q_y = N_y = T_{xy} = 0$.

První podmínka

$$M_y = Ej \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Po dosazení z rovnice (5.50) a úpravě dostaneme první rovnici pro určení konstant

$$\begin{aligned} & A_n(1 - \mu) \lambda_n^2 \operatorname{ch} \lambda_n b + B_n[2\lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n b + (1 - \mu) \lambda_n^2 b \operatorname{sh} \lambda_n b] + \\ & + C_n[2 \operatorname{ch} \lambda_n b + 4\lambda_n b \operatorname{sh} \lambda_n b + (1 - \mu) \lambda_n^2 b^2 \operatorname{ch} \lambda_n b] + \\ & + D_n[6b \operatorname{sh} \lambda_n b + 6\lambda_n b^2 \operatorname{ch} \lambda_n b + (1 - \mu) \lambda_n^2 b^3 \operatorname{sh} \lambda_n b] = \mu \lambda_n^2 P_n. \end{aligned} \quad (\text{V.I})$$

Druhá podmínka

$$s_T N_y = \frac{Ed}{1 - \mu^2} \left(s_T \frac{\partial v}{\partial y} + \mu s_T \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0.$$

Po dosazení vztahů obdržných naznačeným postupem z rovnic (5.27b) a (5.25a), obdržíme po úpravě druhou rovnici pro určení konstant

$$\begin{aligned} & \frac{b^4}{24} \lambda_n^6 P_n \left(\frac{a_1}{a_6} b_5 - b_1 \right) - \mu \lambda_n^2 P_n \left(\frac{a_1}{a_6} + i_T \right) + A_n(\lambda_n^2 \mathfrak{U}_1 \operatorname{ch} \lambda_n b) + \\ & + B_n(\lambda_n \mathfrak{B}_1 \operatorname{ch} \lambda_n b + \lambda_n^2 b \mathfrak{U}_1 \operatorname{sh} \lambda_n b) + \\ & + C_n(\mathfrak{D}_1 \operatorname{ch} \lambda_n b + 2\lambda_n b \mathfrak{B}_1 \operatorname{sh} \lambda_n b + \lambda_n^2 b^2 \mathfrak{U}_1 \operatorname{ch} \lambda_n b) + \\ & + D_n \left(\frac{24 \operatorname{ch} \lambda_n b}{\lambda_n} \mathfrak{F}_1 + 3b \mathfrak{D}_1 \operatorname{sh} \lambda_n b + 3\lambda_n b^2 \mathfrak{B}_1 \operatorname{ch} \lambda_n b + \lambda_n^2 b^3 \mathfrak{U}_1 \operatorname{sh} \lambda_n b \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{V.II})$$

Třetí podmínka

$$s_T T_{xy} = \frac{Ed}{2(1 + \mu)} \left(s_T \frac{\partial u}{\partial y} + s_T \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0.$$

Po dosazení vztahů zjištěných naznačeným postupem z rovnic (5.27b) a (5.25a) obdržíme po úpravě třetí rovnici pro určení konstant

$$\begin{aligned} & A_n(\lambda_n^2 \mathfrak{U}'_1 \operatorname{sh} \lambda_n b) + B_n(\lambda_n \mathfrak{B}'_1 \operatorname{sh} \lambda_n b + \lambda_n^2 b \mathfrak{U}'_1 \operatorname{sh} \lambda_n b) + \\ & + C_n(\mathfrak{D}_1 \operatorname{sh} \lambda_n b + 2\lambda_n b \mathfrak{B}'_1 \operatorname{ch} \lambda_n b + \lambda_n^2 b^2 \mathfrak{U}'_1 \operatorname{sh} \lambda_n b) + \\ & + D_n \left(\frac{6\mathfrak{F}'_1}{\lambda_n} \operatorname{sh} \lambda_n b + 3\mathfrak{D}_1 b \operatorname{ch} \lambda_n b + 3\mathfrak{B}'_1 \lambda_n b^2 \operatorname{sh} \lambda_n b + \right. \\ & \left. + \mathfrak{U}'_1 \lambda_n^2 b^3 \operatorname{ch} \lambda_n b \right) + \frac{b^5}{120} \lambda_n^7 P_n \left(b_1 - \frac{a_1}{a_6} b_5 \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{V.III})$$

V těchto dvou posledních rovnicích značí

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}'_1 &= -b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \mu i_T, & \mathfrak{U}'_1 &= b_1 - b_2 + b_3 - b_4 - i_T, \\ \mathfrak{B}'_1 &= 4b_1 - 2b_2 + 2b_4, & \mathfrak{B}'_1 &= -5b_1 + 3b_2 - b_3 - b_4 - i_T, \\ \mathfrak{D}'_1 &= -20b_1 + 6b_2 + 2b_4 - 8\mu j, & \mathfrak{D}'_1 &= 30b_1 - 12b_2 + 2b_3 - 8j, \\ \mathfrak{F}'_1 &= 5b_1 - b_2 - \mu j, & \mathfrak{F}'_1 &= -35b_1 + 10b_2 - b_3 - 8j. \end{aligned}$$

Čtvrtá podmínka

$$\bar{Q}_y = -\frac{\partial M_y}{\partial y} - 2\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -Ej \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0.$$

Po dosazení z rovnice (5.50) a po úpravě dostaneme čtvrtou rovnici pro určení konstant:

$$\begin{aligned} & -A_n \lambda_n^3 (1 - \mu) \operatorname{sh} \lambda_n b + B_n[\lambda_n^2 (1 + \mu) \operatorname{sh} \lambda_n b - \lambda_n^3 b (1 - \mu) \operatorname{ch} \lambda_n b] + \\ & + C_n[6\lambda_n \operatorname{sh} \lambda_n b + 2\lambda_n^2 b (1 + \mu) \operatorname{ch} \lambda_n b - \lambda_n^3 b^2 (1 - \mu) \operatorname{sh} \lambda_n b] + \\ & + D_n[6 \operatorname{sh} \lambda_n b + 18\lambda_n b \operatorname{ch} \lambda_n b + 3\lambda_n^2 b^2 (1 + \mu) \operatorname{sh} \lambda_n b - \\ & - \lambda_n^3 b^3 (1 - \mu) \operatorname{ch} \lambda_n b] = 0. \end{aligned} \quad (\text{V.IV})$$

Pro přehlednost zavedeme tato další označení

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}'_n &= \lambda_n^7 \frac{b^5}{120} \left(-b_1 + \frac{a_1}{a_6} b_5 \right), \\ \mathfrak{G}_n &= \left(\frac{b^4}{24} \lambda_n^6 b_1 - \frac{a_1}{a_6} b_5 \frac{b^4}{24} \lambda_n^6 + \mu \frac{a_1}{a_6} \lambda_n^2 + \mu j \lambda_n^2 + \mu i_T \lambda_n^2 \right), \\ \Gamma_{n4} &= \lambda_n^2 \mathfrak{U}'_1 \operatorname{sh} \lambda_n b, \\ \Delta_{n4} &= \lambda_n \mathfrak{B}'_1 \operatorname{sh} \lambda_n b + \lambda_n^2 \mathfrak{U}'_1 b \operatorname{ch} \lambda_n b, \\ \Theta_{n4} &= \mathfrak{D}'_1 \operatorname{sh} \lambda_n b + 2\lambda_n \mathfrak{B}'_1 b \operatorname{ch} \lambda_n b + \lambda_n^2 \mathfrak{U}'_1 b^2 \operatorname{sh} \lambda_n b, \\ A_{n4} &= \frac{6\mathfrak{F}'_1}{\lambda_n} \operatorname{sh} \lambda_n b + 3\mathfrak{D}'_1 b \operatorname{ch} \lambda_n b + 3\lambda_n \mathfrak{B}'_1 b^2 \operatorname{sh} \lambda_n b + \lambda_n^2 \mathfrak{B}'_1 b^3 \operatorname{ch} \lambda_n b, \\ \Gamma_{n3} &= \lambda_n^3 (1 - \mu) \operatorname{sh} \lambda_n b, \\ \Delta_{n3} &= \lambda_n^2 (1 + \mu) \operatorname{sh} \lambda_n b - \lambda_n^3 (1 - \mu) b \operatorname{ch} \lambda_n b, \\ \Theta_{n3} &= 6\lambda_n \operatorname{sh} \lambda_n b + 2\lambda_n^2 (1 + \mu) b \operatorname{ch} \lambda_n b - \lambda_n^3 b^2 (1 - \mu) \operatorname{sh} \lambda_n b, \\ A_{n3} &= 6 \operatorname{sh} \lambda_n b + 18\lambda_n b \operatorname{ch} \lambda_n b + 3\lambda_n^2 b^2 (1 + \mu) \operatorname{sh} \lambda_n b - \lambda_n^3 (1 - \mu) b^3 \operatorname{ch} \lambda_n b, \\ \Gamma_{n2} &= \lambda_n^2 (1 - \mu) \operatorname{ch} \lambda_n b, \\ \Delta_{n2} &= 2\lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n b + \lambda_n^2 (1 - \mu) b \operatorname{sh} \lambda_n b, \\ \Theta_{n2} &= 2 \operatorname{ch} \lambda_n b + 4\lambda_n b \operatorname{ch} \lambda_n b + \lambda_n^2 b^2 (1 - \mu) \operatorname{ch} \lambda_n b, \\ A_{n2} &= 6b \operatorname{sh} \lambda_n b + 6\lambda_n b^2 \operatorname{ch} \lambda_n b + \lambda_n b (1 - \mu) b^3 \operatorname{sh} \lambda_n b, \\ \Gamma_{n1} &= \lambda_n^2 \mathfrak{U}_1 \operatorname{ch} \lambda_n b, \\ \Delta_{n1} &= \lambda_n \mathfrak{B}_1 \operatorname{ch} \lambda_n b + \lambda_n^2 \mathfrak{U}_1 b \operatorname{sh} \lambda_n b, \\ \Theta_{n1} &= \mathfrak{D}_1 \operatorname{ch} \lambda_n b + 2\lambda_n \mathfrak{B}_1 b \operatorname{sh} \lambda_n b + \lambda_n^2 \mathfrak{U}_1 b^2 \operatorname{ch} \lambda_n b, \\ A_{n1} &= \frac{24\mathfrak{F}_1}{\lambda_n} \operatorname{ch} \lambda_n b + 3\mathfrak{D}_1 b_1 \operatorname{sh} \lambda_n b + 3\lambda_n \mathfrak{B}_1 b^2 \operatorname{ch} \lambda_n b + \lambda_n^2 \mathfrak{U}_1 b^3 \operatorname{sh} \lambda_n b. \end{aligned}$$

Potom rovnice (V-I) a (V-IV) přejdou do tvaru

$$\begin{aligned} A_n \Gamma_{n1} + B_n \Lambda_{n1} + C_n \Theta_{n1} + D_n \Lambda_{n1} &= P_n \mathfrak{G}_n, \\ A_n \Gamma_{n2} + B_n \Lambda_{n2} + C_n \Theta_{n2} + D_n \Lambda_{n2} &= -\mu \lambda_n^2 K_n, \\ -A_n \Gamma_{n3} + B_n \Lambda_{n3} + C_n \Theta_{n3} + D_n \Lambda_{n3} &= 0, \\ A_n \Gamma_{n4} + B_n \Lambda_{n4} + C_n \Theta_{n4} + D_n \Lambda_{n4} &= -P_n \mathfrak{G}'_n. \end{aligned} \quad (\text{V.I-IV})$$

Zde

$$P_n = \frac{a_6}{a_1} \frac{4p}{\pi} \frac{1}{\lambda_n^4} \sin \frac{n\pi}{2},$$

přičemž $\lambda_n = n\pi/2l$ pro $n = 1, 3, 5, 7$.

Vyloučením třetí rovnice a po úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} B_n \delta_1 + C_n \xi_1 + D_n \varepsilon_1 &= -P_n \mathfrak{G}_n, \\ B_n \delta_2 + C_n \xi_2 + D_n \varepsilon_2 &= -\mu \lambda_n^2 K_n, \\ B_n \delta_3 + C_n \xi_3 + D_n \varepsilon_3 &= -P_n \mathfrak{G}'_n, \end{aligned}$$

kde značí

$$\delta_1 = \Lambda_{n3} \frac{\Gamma_{n1}}{\Gamma_{n3}} + \Lambda_{n1},$$

$$\delta_2 = \Lambda_{n3} \frac{\Gamma_{n2}}{\Gamma_{n3}} + \Lambda_{n2},$$

$$\delta_3 = \Lambda_{n3} \frac{\Gamma_{n4}}{\Gamma_{n3}} + \Lambda_{n4},$$

$$\xi_1 = \Theta_{n3} \frac{\Gamma_{n1}}{\Gamma_{n3}} + \Theta_{n1},$$

$$\xi_2 = \Theta_{n3} \frac{\Gamma_{n2}}{\Gamma_{n3}} + \Theta_{n2},$$

$$\xi_3 = \Theta_{n3} \frac{\Gamma_{n4}}{\Gamma_{n3}} + \Theta_{n4},$$

$$\varepsilon_1 = \Lambda_{n3} \frac{\Gamma_{n1}}{\Gamma_{n3}} + \Lambda_{n1},$$

$$\varepsilon_2 = \Lambda_{n3} \frac{\Gamma_{n2}}{\Gamma_{n3}} + \Lambda_{n2},$$

$$\varepsilon_3 = \Lambda_{n3} \frac{\Gamma_{n4}}{\Gamma_{n3}} + \Lambda_{n4}.$$

Po vyloučení první rovnice dostaneme po úpravách

$$C_n \left(\xi_2 - \xi_1 \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) + D_n \left(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) = P_n \left(\mathfrak{G}_n \frac{\delta_2}{\delta_1} - \mu \lambda_n^2 \right), \quad (\text{a})$$

$$C_n \left(\xi_3 - \xi_1 \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) + D_n \left(\varepsilon_3 - \varepsilon_1 \frac{\delta_3}{\delta_1} \right) = P_n \left(\mathfrak{G}_n \frac{\delta_2}{\delta_1} - \mathfrak{G}'_n \right). \quad (\text{b})$$

Determinant soustavy je

$$\Delta_n = \xi_2 \varepsilon_3 - \xi_1 \varepsilon_3 \frac{\delta_2}{\delta_1} - \xi_2 \varepsilon_1 \frac{\delta_3}{\delta_1} - \varepsilon_2 \xi_3 + \varepsilon_1 \xi_3 \frac{\delta_2}{\delta_1} + \xi_1 \varepsilon_2 \frac{\delta_3}{\delta_1},$$

determinant neznámé C_n

$$\Delta C_n = P_n \left(\mathfrak{G}_n \varepsilon_3 \frac{\delta_2}{\delta_1} - \mu \lambda_n^2 \varepsilon_3 + \mu \lambda_n^2 \varepsilon_1 \frac{\delta_3}{\delta_1} - \mathfrak{G}_n \varepsilon_2 \frac{\delta_3}{\delta_1} + \mathfrak{G}'_n \varepsilon_2 - \mathfrak{G}'_n \varepsilon_1 \frac{\delta_2}{\delta_1} \right)$$

a determinant neznámé D_n

$$\Delta D_n = P_n \left(\xi_2 \mathfrak{G}_n \frac{\delta_3}{\delta_1} - \xi_2 \mathfrak{G}'_n + \xi_1 \mathfrak{G}_n \frac{\delta_2}{\delta_1} - \mathfrak{G}_n \frac{\delta_2}{\delta_1} \xi_3 + \mu \lambda_n^2 \xi_3 - \mu \lambda_n^2 \xi_1 \frac{\delta_3}{\delta_1} \right).$$

Potom

$$C_n = \frac{\Delta C_n}{\Delta_n} = P_n \omega_n, \quad (\text{V.V})$$

$$D_n = \frac{\Delta D_n}{\Delta_n} = P_n \varkappa_n, \quad (\text{V.VI})$$

kde

$$\varkappa_n = \frac{\xi_2 \mathfrak{G}_n \frac{\delta_3}{\delta_1} - \xi_1 \mathfrak{G}'_n + \xi_1 \mathfrak{G}_n \frac{\delta_2}{\delta_1} - \mathfrak{G}_n \xi_3 \frac{\delta_2}{\delta_1} + \mu \lambda_n^2 \xi_3 - \mu \lambda_n^2 \xi_1 \frac{\delta_3}{\delta_1}}{\xi_2 \varepsilon_3 - \xi_1 \varepsilon_3 \frac{\delta_2}{\delta_1} - \xi_2 \varepsilon_1 \frac{\delta_3}{\delta_1} - \varepsilon_2 \xi_3 + \varepsilon_1 \xi_3 \frac{\delta_2}{\delta_1} + \xi_1 \varepsilon_2 \frac{\delta_3}{\delta_1}},$$

$$\omega_n = \frac{\mathfrak{G}_n \varepsilon_3 \frac{\delta_2}{\delta_1} - \mu \lambda_n^2 \varepsilon_3 + \mu \lambda_n^2 \varepsilon_1 \frac{\delta_3}{\delta_1} - \mathfrak{G}_n \varepsilon_2 \frac{\delta_3}{\delta_1} + \mathfrak{G}'_n \varepsilon_2 - \mathfrak{G}'_n \varepsilon_1 \frac{\delta_2}{\delta_1}}{\xi_2 \varepsilon_3 - \xi_1 \varepsilon_3 \frac{\delta_2}{\delta_1} - \xi_2 \varepsilon_1 \frac{\delta_3}{\delta_1} - \varepsilon_2 \xi_3 + \varepsilon_1 \xi_3 \frac{\delta_2}{\delta_1} + \xi_1 \varepsilon_2 \frac{\delta_3}{\delta_1}}$$

a dále

$$B_n = -P_n \varphi_n, \quad (\text{V.VII})$$

$$A_n = P_n \Psi_n, \quad (\text{V.VIII})$$

kde

$$\varphi_n = \frac{\mathfrak{G}_n}{\delta_1} + \omega_n \frac{\xi_1}{\delta_1} + \varkappa_n \frac{\varepsilon_1}{\delta_1}$$

a

$$\Psi_n = -\varphi_n \frac{\Lambda_{n3}}{\Gamma_{n3}} + \omega_n \frac{\Theta_{n3}}{\Gamma_{n3}} + \varkappa_n \frac{\Gamma_{n3}}{\Gamma_{n3}}.$$

Průhybová plocha je potom dána rovnicí

$$w(x, y) = \sum_1^{\infty} [\cos \lambda_n x P_n \{-1 + \Psi_n \operatorname{ch} \lambda_n y - \varphi_n y \operatorname{sh} \lambda_n y + \omega_n y^2 \operatorname{ch} \lambda_n y + \kappa_n y^3 \operatorname{sh} \lambda_n y\}]. \quad (\text{V.IX})$$

Obdobným způsobem dostali bychom rovnice průhybové plochy i pro ostatní typy kořenů bikvadratické rovnice (5.43).

PRÍLOHA VI

Určení konstant $D_n - A_n$ rovnice (5.50) pro izotropní desku přechodem z obecných vztahů daných v příloze V.

V případě izotropní desky je

$$s_T = 0, \quad i_T = 0, \quad \frac{a_1}{a_6} = -j,$$

$$f_T = f_P = \frac{d}{1 - \mu^2}, \quad i_T = i_P = j.$$

Po dosazení těchto hodnot do vztahů (5.26a, d) dostaneme

$$b_1 = \frac{2\mu - 2\mu^2}{1 - \mu^2} j,$$

$$b_2 = \frac{1 + 6\mu - 7\mu^2}{1 - \mu^2} j,$$

$$b_3 = \frac{2 + 6\mu - 8\mu^2}{1 - \mu^2} j,$$

$$b_4 = \frac{1 + 2\mu - 3\mu^2}{1 - \mu^2} j,$$

$$b_5 = \frac{-2\mu}{1 + \mu}$$

a dále

$$\mathfrak{A}_1 = 0, \quad \mathfrak{A}'_1 = 0,$$

$$\mathfrak{B}_1 = 0, \quad \mathfrak{B}'_1 = 0,$$

$$\mathfrak{D}_1 = 8j(1 - \mu), \quad \mathfrak{D}'_1 = -16j,$$

$$\mathfrak{F}_1 = -j \frac{(1 - \mu)^2}{(1 + \mu)}, \quad \mathfrak{F}'_1 = -48j \frac{\mu}{1 + \mu},$$

Zavedením těchto výrazů do (V.I ÷ IV) obdržíme po úpravách výsledný tvar rovnic pro určení konstant průhybové funkce izotropní desky

$$A_n \lambda_n^2 (1 - \mu) \operatorname{ch} \lambda_n b + B_n [2\lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n b + \lambda_n^2 b (1 - \mu) \operatorname{sh} \lambda_n b] + C_n [2 \operatorname{ch} \lambda_n b + 4\lambda_n b \operatorname{sh} \lambda_n b + \lambda_n^2 b^2 (1 - \mu) \operatorname{ch} \lambda_n b] + D_n [6b \operatorname{sh} \lambda_n b + 6\lambda_n b^2 \operatorname{ch} \lambda_n b + \lambda_n^2 b^3 (1 - \mu) \operatorname{sh} \lambda_n b] = \frac{4\mu p \sin n\pi/2}{\pi j \lambda_n^2 n}, \quad (\text{VI.I})$$

$$C_n \operatorname{ch} \lambda_n b - 3D_n \left[\frac{\operatorname{ch} \lambda_n b}{\lambda_n g_1} - b \operatorname{sh} \lambda_n b \right] = 0, \quad (\text{VI.II})$$

$$C_n \operatorname{sh} \lambda_n b + 3D_n \left[\frac{2\mu \operatorname{sh} \lambda_n b}{\lambda_n(1+\mu)} + b \operatorname{ch} \lambda_n b \right] = 0, \quad (\text{VI.III})$$

$$\begin{aligned} -A_n \lambda_n^3(1-\mu) \operatorname{sh} \lambda_n b + B_n [\lambda_n^2(1+\mu) \operatorname{sh} \lambda_n b - \lambda_n^3 b(1-\mu) \operatorname{ch} \lambda_n b] + \\ + C_n [6\lambda_n \operatorname{sh} \lambda_n b + 2\lambda_n^2 b(1+\mu) \operatorname{ch} \lambda_n b - \lambda_n^3 b^2(1-\mu) \lambda_n b] + \\ + D_n [6 \operatorname{sh} \lambda_n b + 18\lambda_n b \operatorname{ch} \lambda_n b + 3\lambda_n^3 b^2(1+\mu) \operatorname{sh} \lambda_n b - \\ - \lambda_n^3 b^3(1-\mu) \operatorname{ch} \lambda_n b] = 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.IV})$$

Rovnice (VI.II) a (VI.III) můžeme přepsat ve tvaru

$$C_n - 3D_n \left(\frac{1}{\lambda_n b} - b \operatorname{th} \lambda_n b \right) = 0,$$

$$C_n \operatorname{th} \lambda_n b + 3D_n \left(\frac{2\mu \operatorname{th} \lambda_n b}{\lambda_n(1+\mu)} + b \right) = 0.$$

Determinant této soustavy je

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \frac{2\mu}{\lambda_n(1+\mu)} \operatorname{th} \lambda_n b + b + \frac{(1-\mu) \operatorname{th} \lambda_n b}{\lambda_n(1+\mu)} - b \operatorname{th}^2 \lambda_n b = \\ &= b(1 - \operatorname{th}^2 \lambda_n b) + \frac{\operatorname{th} \lambda_n b}{\lambda_n} = \frac{\operatorname{th} \lambda_n b}{\lambda_n} + \frac{b}{\operatorname{ch}^2 \lambda_n b} \neq 0. \end{aligned}$$

Protože $\Delta_n \neq 0$, potom aby byly splněny rovnice (VI.II) a (VI.III) identicky, musí být $C_n = D_n = 0$.

Rovnice (VI.I) a (VI.IV) pak přejdou do tvaru

$$\begin{aligned} A_n \lambda_n^2(1-\mu) \operatorname{ch} \lambda_n b + B_n [2\lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n b + \lambda_n^2 b(1-\mu) \operatorname{sh} \lambda_n b] = \\ = \frac{4\mu p}{\pi j \lambda_n^2 n} \sin \frac{n\pi}{2}, \end{aligned} \quad (\text{VI.V})$$

$$-A_n \lambda_n^3(1-\mu) \operatorname{sh} \lambda_n b + B_n [\lambda_n^2(1+\mu) \operatorname{sh} \lambda_n b - \lambda_n^3 b(1-\mu) \operatorname{ch} \lambda_n b] = 0. \quad (\text{VI.VI})$$

Determinant této soustavy zní

$$\Delta_n = -\lambda_n^4(1-\mu)^2 [\operatorname{ch} \lambda_n b \operatorname{sh} \lambda_n b + 3\lambda_n b (\operatorname{ch}^2 \lambda_n b + \operatorname{sh}^2 \lambda_n b)]$$

a determinanty neznámých A_n a B_n postupně

$$\Delta A_n = -\frac{4\mu p}{\pi j n} \sin \frac{n\pi}{2} [(1+\mu) \operatorname{sh} \lambda_n b - \lambda_n b(1-\mu) \operatorname{ch} \lambda_n b],$$

$$\Delta B_n = \frac{4\mu p \sin \frac{n\pi}{2}}{\pi j n} (1-\mu) \operatorname{sh} \lambda_n b.$$

toho vychází neznámé

$$\begin{aligned} A_n &= -\frac{4\mu p}{\pi j \lambda_n^2 n(1-\mu)^2} \sin \frac{n\pi}{2} \left[\frac{(1+\mu) \operatorname{sh} \lambda_n b - \lambda_n b(1-\mu) \operatorname{ch} \lambda_n b}{\operatorname{ch} \lambda_n b \operatorname{sh} \lambda_n b + \lambda_n b (\operatorname{ch}^2 \lambda_n b + \operatorname{sh}^2 \lambda_n b)} \right], \\ B_n &= -\frac{4\mu p}{\pi j \lambda_n^3 n(1-\mu)} \sin \frac{n\pi}{2} \left[\frac{\operatorname{sh} \lambda_n b}{\operatorname{ch} \lambda_n b \operatorname{sh} \lambda_n b + \lambda_n b (\operatorname{ch}^2 \lambda_n b + \operatorname{sh}^2 \lambda_n b)} \right] \end{aligned}$$

a průhybová plocha je potom dána rovnicí

$$w(x, y) = \sum_1^{\infty} \cos \lambda_n x (P_n + A_n \operatorname{ch} \lambda_n y + B_n y \operatorname{sh} \lambda_n y). \quad (\text{VI.VII})$$

PŘÍLOHA VII

Důkaz o shodě řešení podle rovnice (5.50) s řešením podle obvyklé rovnice izotropní desky 4. řádu

Rovnice izotropní desky zní:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}, \quad \text{kde } D = \frac{Ed^3}{12(1 - \mu^2)}.$$

Předpokládáme rovnoměrné zatížení $p(x, y)$ po celé ploše desky. Po rozvinutí ve Fourierovu řadu pouze podle x je

$$p(x) = \frac{4p}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{2l}.$$

Po dosazení do rovnice pásu $d^4 w/dx^4 = p(x)/D$, její integraci a úpravě vychází

$$w(x) = \frac{64pl^4}{\pi^5 D} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{2l} + K_1 \frac{x^3}{6} + K_2 \frac{x^2}{2} + K_3 x + K_4.$$

Z okrajových podmínek pro $x = \pm l$ ($w = 0$ a $d^2 w/dx^2 = 0$) plyne $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 0$, a tedy

$$w(x) = \frac{64pl^4}{\pi^5 D} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{2l}.$$

Řešení homogenní rovnice se předpokládá ve tvaru

$$w_0 = \sum_1^{\infty} Y_n(y) \cos \lambda_n x, \quad \text{kde } \lambda_n = \frac{n\pi}{2l} \quad (n = 1, 3, 5, \dots).$$

Obvyklým postupem dostaneme pro symetrické zatížení

$$Y_n = A_n \operatorname{ch} \lambda_n y + B_n y \operatorname{sh} \lambda_n y$$

a

$$w_0(x, y) = \sum_1^{\infty} \cos \lambda_n x (A_n \operatorname{ch} \lambda_n y + B_n y \operatorname{sh} \lambda_n y).$$

Celkové řešení je shodné s řešením podle přílohy VI (rovnice (VI.VII)) je

$$\begin{aligned} w(x, y) &= w_0(x, y) + w(x) = \\ &= \sum_1^{\infty} \cos \lambda_n x [P_n + A_n \operatorname{ch} \lambda_n y + B_n y \operatorname{sh} \lambda_n y]. \end{aligned} \quad (\text{VII.I})$$

Z okrajových podmínek pro $x = \pm l$ a $y = \pm b$ vychází rovnice pro určení integračních konstant

$$\begin{aligned} A_n \lambda_n^2 (1 - \mu) \operatorname{ch} \lambda_n b + B_n [\lambda_n^2 (1 - \mu) b \operatorname{sh} \lambda_n b + 2 \lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n b] &= \mu \lambda_n^2 P_n, \quad (\text{VII.II}) \\ - A_n \lambda_n^3 (1 - \mu) \operatorname{sh} \lambda_n b + B_n [(1 + \mu) \lambda_n^2 \operatorname{sh} \lambda_n b - \end{aligned}$$

$$- (1 - \mu) \lambda_n^3 b \operatorname{ch} \lambda_n b] = 0. \quad (\text{VII.III})$$

Po úpravě členů na pravé straně ve smyslu označení v příloze VI dostaneme

$$\mu \lambda_n^2 P_n = \mu \frac{n^2 \pi^2}{4l^2} \frac{64pl^4}{j\pi^5 n^5} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{4p\mu}{j\pi n \lambda_n^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

a rovnice (VI.V), a (VI.VI') a (VII.II), (VII.III) spolu zcela souhlasí.

Odvození okrajových podmínek pro nekonečný pás za přímkového zatížení

Dosadíme-li do výrazu (5.27c) (kap. 5.10) příslušné derivace funkce w podle (5.54), dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = & \sum_1^{\infty} \cos \lambda_n x \left\{ \frac{i_T}{s_T} [A_n \lambda_n^4 e^{-\lambda_n y} + B_n \lambda_n^4 y e^{-\lambda_n y} + C_n \lambda_n^4 y^2 e^{-\lambda_n y} + D_n y^3 \lambda_n^4 e^{-\lambda_n y}] + \right. \\ & + \frac{2j}{s_T} [e^{-\lambda_n y} (-A_n \lambda_n^4 + 2\lambda_n^3 B_n + 2\lambda_n^2 C_n) + y e^{-\lambda_n y} (-B_n \lambda_n^4 + 4\lambda_n^3 C_n - 6\lambda_n^2 D_n) + \\ & + y^2 e^{-\lambda_n y} (-C_n \lambda_n^4 + 6\lambda_n^3 D_n) + y^3 e^{-\lambda_n y} (-\lambda_n^4 D_n)] + \frac{j}{s_T} [e^{-\lambda_n y} (A_n \lambda_n^4 n - 4\lambda_n^3 B_n + \\ & + 12\lambda_n^2 C_n - 18\lambda_n D_n) + y e^{-\lambda_n y} (B_n \lambda_n^4 - 8\lambda_n^3 C_n + 36\lambda_n^2 D_n) + \\ & \left. + y^2 e^{-\lambda_n y} (C_n \lambda_n^4 - 12\lambda_n^3 D_n) + y^3 e^{-\lambda_n y} D_n \lambda_n^4 \right\}. \end{aligned}$$

Po dvojnásobné integraci podle x vychází

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = & \sum_1^{\infty} \cos \lambda_n x \left\{ \frac{i_T}{s_T} [-A_n \lambda_n^2 e^{-\lambda_n y} - B_n \lambda_n^2 y e^{-\lambda_n y} - C_n \lambda_n^2 y^2 e^{-\lambda_n y} - D_n \lambda_n^2 y^3 e^{-\lambda_n y}] + \right. \\ & + \frac{2j}{s_T} [e^{-\lambda_n y} (A_n \lambda_n^2 - 2\lambda_n B_n + 2C_n) + y e^{-\lambda_n y} (B_n \lambda_n^2 - 4\lambda_n C_n + 6D_n) + \\ & + y^2 e^{-\lambda_n y} (C_n \lambda_n^2 - 6\lambda_n D_n) + y^3 e^{-\lambda_n y} \lambda_n^2 D_n] + \frac{j}{s_T} [e^{-\lambda_n y} (-A_n \lambda_n^2 + \\ & + 4\lambda_n B_n - 12C_n + 18 \frac{D_n}{\lambda_n}) + y e^{-\lambda_n y} (-B_n \lambda_n^2 + 8\lambda_n C_n - 36D_n) + \\ & \left. + e^{-\lambda_n y} (-C_n \lambda_n^2 + 12\lambda_n D_n) + y^3 e^{-\lambda_n y} (-D_n \lambda_n^2)] \right\} + K_1 x + K_2. \end{aligned}$$

Dosazením příslušných derivací funkce w podle (5.54) do výrazu (5.25b) dostaneme

$$\frac{\partial^5 y}{\partial y^5} = \sum_1^{\infty} \cos \lambda_n x \{ e^{-\lambda_n y} \bar{u}_n + y e^{-\lambda_n y} \bar{v}_n + y^2 e^{-\lambda_n y} \bar{d}_n + y^3 e^{-\lambda_n y} \bar{\delta}_n \},$$

kde

$$\bar{u}_n = [-b_1 A_n \lambda_n^6 + b_2 (A_n \lambda_n^6 - 2\lambda_n^5 B_n + 2\lambda_n^4 C_n) + b_3 (-A_n \lambda_n^6 + 4\lambda_n^5 B_n - 12\lambda_n^4 C_n + 18\lambda_n^3 D_n) + b_4 (A_n \lambda_n^6 - 6\lambda_n^5 B_n + 30\lambda_n^4 C_n - 114\lambda_n^3 D_n)],$$

$$\bar{v}_n = [-B_n b_1 \lambda_n^6 + b_2 (B_n \lambda_n^6 - 4\lambda_n^5 C_n + 6\lambda_n^4 D_n) + b_3 (-B_n \lambda_n^6 + 8\lambda_n^5 C_n - 36\lambda_n^4 D_n) + b_4 (B_n \lambda_n^6 - 12\lambda_n^5 C_n + 90\lambda_n^4 D_n)],$$

$$\bar{d}_n = [-C_n \lambda_n^6 b_1 + b_2 (C_n \lambda_n^6 - 6\lambda_n^5 D_n) + b_3 (-C_n \lambda_n^6 + 12\lambda_n^5 D_n) + b_4 (C_n \lambda_n^6 - 18\lambda_n^5 D_n)],$$

$$\bar{\delta}_n = [-D_n \lambda_n^6 b_1 + b_2 D_n \lambda_n^6 + b_3 (-D_n \lambda_n^6) + b_4 D_n \lambda_n^6].$$

Pro čtyřnásobné integraci podle y vychází

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} = & \sum_1^{\infty} \cos \lambda_n x \left\{ e^{-\lambda_n y} \left(\frac{\bar{u}_n}{\lambda_n^4} + \frac{4\bar{v}_n}{\lambda_n^5} + \frac{20\bar{d}_n}{\lambda_n^6} + \frac{120\bar{\delta}_n}{\lambda_n^7} \right) + \right. \\ & + y e^{-\lambda_n y} \left(\frac{\bar{v}_n}{\lambda_n^4} + \frac{8\bar{d}_n}{\lambda_n^5} + \frac{60\bar{\delta}_n}{\lambda_n^6} \right) + y^2 e^{-\lambda_n y} \left(\frac{\bar{d}_n}{\lambda_n^4} + \frac{12\bar{\delta}_n}{\lambda_n^5} \right) + \\ & \left. + y^3 e^{-\lambda_n y} \left(\frac{\bar{\delta}_n}{\lambda_n^4} \right) \right\} + \frac{M_1 y^3}{6} + \frac{M_2 y^2}{2} + M_3 y + M_4. \end{aligned}$$

Okrajová podmínka pro N_x na okraji $x = \pm l$ zní

$$[N_x]_{x=\pm l} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{Ed}{1-\mu^2} + E f_T \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \mu \frac{Ed}{1-\mu^2} - E s_T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{x=\pm l} = 0.$$

Po dosažení a úpravě (při $\cos \lambda_n l = 0$)

$$N_x = \left(\frac{Ed}{1-\mu^2} + E f_T \right) (K_1 l + K_2) + \frac{\mu Ed}{1-\mu^2} \frac{M_1 y^3}{6} + \frac{M_2 y^2}{2} + M_3 y + M_4 = 0.$$

Jelikož tato rovnice musí platit pro každé y , bude $M_1 = M_2 = M_3 = 0$.

Je tedy pro $+l$

$$N_x = \left(\frac{Ed}{1-\mu^2} + E f_T \right) (K_1 l + K_2) + \frac{\mu Ed}{1-\mu^2} M_4 = 0$$

a pro $-l$

$$N_x = \left(\frac{Ed}{1-\mu^2} + E f_T \right) (-K_1 l + K_2) + \frac{\mu Ed}{1-\mu^2} M_4 = 0.$$

Odečtením dostaneme,

$$2K_1 l \left(\frac{Ed}{1-\mu^2} + E f_T \right) = 0,$$

z čehož $K_1 = 0$; sečtením vychází

$$M_4 = - \left(\frac{1}{\mu} + \frac{f_T (1-\mu^2)}{\mu d} \right) K_2.$$

Podél krajů $x = \pm l$ musí být rovněž $M_x = 0$, tj.

$$M_x = \left[-Ej \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + E \left(s_T \frac{\partial u}{\partial x} - i_T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]_{x=\pm l} = 0.$$

Víme, že

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=\pm l} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=\pm l} = 0,$$

z čehož plyne

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\pm l} = 0.$$

Z tohoto výrazu po dosazení za $\partial u/\partial x$ plyne pro $x = \pm l$, že také $K_2 = 0$, a tedy i $M_2 = 0$.

Výraz pro N_x bude po úpravě mít tvar

$$N_x = \sum_1^{\infty} \cos \lambda_n x e^{-\lambda_n y} \left[\left[\frac{Ed}{1-\mu^2} + E J_T \right] \left\{ \left[\frac{l_T}{s_T} (-A_n \lambda_n^2 - B_n \lambda_n^2 y - C_n \lambda_n^2 y^2 - D_n \lambda_n^2 y^3) + \frac{2j}{s_T} [(A_n \lambda_n^2 - 2\lambda_n B_n + 2C_n) + y(B_n \lambda_n^2 - 4\lambda_n^2 C_n + 6D_n) + y^2(C_n \lambda_n^2 - 6\lambda_n D_n) + y^3 \lambda_n^2 D_n] + \frac{j}{s_T} \left[(-A_n \lambda_n^2 + 4\lambda_n B_n - 12C_n + \frac{18D_n}{\lambda_n}) + y(-B_n \lambda_n^2 + 8\lambda_n C_n - 36D_n) + y^2(-C_n \lambda_n^2 + 12\lambda_n D_n) + y^3(-D_n \lambda_n^2) \right] \right\} + \frac{\mu Ed}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{9\mathfrak{B}_n}{\lambda_n^4} + \frac{4\mathfrak{B}_n}{\lambda_n^5} + \frac{20\mathfrak{D}_n}{\lambda_n^6} + \frac{120\mathfrak{F}_n}{\lambda_n^7} \right) + y \left(\frac{9\mathfrak{B}_n}{\lambda_n^4} + \frac{8\mathfrak{D}_n}{\lambda_n^5} + \frac{60\mathfrak{F}_n}{\lambda_n^6} \right) + y^2 \left(\frac{\mathfrak{D}_n}{\lambda_n^4} + \frac{12\mathfrak{F}_n}{\lambda_n^5} \right) + y^3 \frac{\mathfrak{F}_n}{\lambda_n^4} \right] - E s_T (-A_n \lambda_n^2 - B_n \lambda_n^2 y - C_n \lambda_n^2 y^2 - D_n \lambda_n^2 y^3) \right].$$

První okrajová podmínka vyplývá ze skutečnosti, že normální síla N_x pro pevné x ve velké vzdálenosti od zatížení se anuluje, čili

$$\lim_{y \rightarrow \infty} N_x = 0$$

neboli, že $\max N_x$ je pro $y = 0$.

Je tedy

$$\frac{\partial N_x}{\partial y} = 0.$$

Pro N_y platí

$$N_y = \frac{Ed}{1-\mu^2} \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

a po dosazení

$$N_y = \frac{Ed}{1-\mu^2} \left[\sum_1^{\infty} \cos \lambda_n x \cdot e^{-\lambda_n y} \left\{ \left(\frac{9\mathfrak{B}_n}{\lambda_n^4} + \frac{4\mathfrak{B}_n}{\lambda_n^5} + \frac{20\mathfrak{D}_n}{\lambda_n^6} + \frac{120\mathfrak{F}_n}{\lambda_n^7} \right) + y \left(\frac{9\mathfrak{B}_n}{\lambda_n^4} + \frac{8\mathfrak{D}_n}{\lambda_n^5} + \frac{60\mathfrak{F}_n}{\lambda_n^6} \right) + y^2 \left(\frac{\mathfrak{D}_n}{\lambda_n^4} + \frac{12\mathfrak{F}_n}{\lambda_n^5} \right) + y^3 \frac{\mathfrak{F}_n}{\lambda_n^4} + \right. \right.$$

$$\left. + \mu \frac{l_T}{s_T} (-A_n \lambda_n^2 - B_n \lambda_n^2 y - C_n \lambda_n^2 y^2 - D_n \lambda_n^2 y^3) + \frac{2\mu j}{s_T} [(A_n \lambda_n^2 - 2\lambda_n B_n - 2C_n) + y(\lambda_n^2 B_n - 4\lambda_n C_n + 6D_n) + y^2(C_n \lambda_n^2 - 6\lambda_n D_n) + y^3 \lambda_n^2 D_n] + \frac{\mu j}{s_T} \left[\left(-A_n \lambda_n^2 + 4\lambda_n B_n - 12C_n + \frac{18D_n}{\lambda_n} \right) + y(-B_n \lambda_n^2 + 8\lambda_n C_n - 36D_n) + y^2(-C_n \lambda_n^2 + 12\lambda_n D_n) + y^3(-D_n \lambda_n^2) \right] \right].$$

Druhá okrajová podmínka plyne ze skutečnosti, že N_y pro pevné x bude rovněž mít své maximum pro $y = 0$.

Je tedy

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} = 0.$$

LITERATURA

- [1] GUYON Y.: Calcul des ponts larges à poutres multiples solidarisées par des entretoises. Annales des Ponts et Chaussées de France 116 (9), 553—612, 1946.
- [2] GUYON Y.: Calcul des ponts-dalles. Annales des Ponts et Chaussées de France 119 (9, 10), 555—589, 683—718, 1949.
- [3] MASSONNET CH.: Méthode de calcul des ponts à poutres multiples tenant compte de leur résistance à la torsion. AIPC Mémoires X, 147—182, 1950.
- [4] MASSONNET CH.: Compléments à la méthode de calcul des ponts à poutres multiples. Annales des travaux publics de Belgique 107 (5), 680—748, 1954.
- [5] KLÖPPEL K.: Zur ortotropen Platte aus Stahl. Festschrift zur Einweihung der Rheinbrücke Köln — Mülheim. Köln 1951, R. Oldenbourg.
- [6] CORNELIUS W.: Der wirtschaftliche Entwurf der Stahlplattenfahrbahn. Festschrift zur Einweihung der Rheinbrücke Köln — Mülheim. R. Oldenbourg, Köln 1951.
- [7] CORNELIUS W.: Die Berechnung der ebenen Flächentragwerke mit Hilfe der Theorie der orthogonal-anisotropen Platte. Stahlbau 21 (2, 3, 4), 21—24, 44—48, 60—63, 1952.
- [8] GRUBER K.: Die Querverteilung der Lasten bei Brücken mit zwei Hauptträgern. Bauingenieur 23 (7), 323—328, 1942.
- [9] EBNER H. a KÖLLER H.: Zur Berechnung des Kräfteverlaufes in versteiften Zylinderschalen. Luftfahrt-Forschung 14 (11), 607—618, 1937.
- [10] EBNER H. a KÖLLER H.: Über den Kräfteverlauf in länge-und querversteiften Scheiben. Luftfahrt-Forschung 15 (10); 527—542, 1938.
- [11] HOMBERG H.: Über die Lastverteilung durch Schubkräfte Theorie des Plattenkreuzwerkes. Stahlbau 21 (3, 4, 5), 42—43, 64—67, 77—79, 1952.
- [12] HOMBERG H.: Kreuzwerke, Statik der Trägerroste und Platten. J. Springer, Berlin 1951.
- [13] PFLÜGER A.: Zum Beulproblem der anisotropen Rechteckplatte. Ingenieur-Archiv 16 (2), 111—120, 1947.
- [14] TRENKS K.: Beitrag zur Berechnung orthogonal anisotroper Rechteckplatten. Bauingenieur 29 (10), 372—377, 1954.
- [15] JARNÍK V.: Diferenciální počet I, NČSAV, Praha 1955.
- [16] PFLÜGER A.: Das Beulproblem der ortotropen Platte mit Hohlsteifen. Z. Flugwiss. 5 (6), 178—181, 1957.

Рихард Бареш, Павел Махан

ТОЧНЫЙ РАСЧЕТ ПЛИТ ПО ФОРМЕ ОРТОТРОПНЫХ

В статье дано точное решение плит по форме ортотропных для четырех основных случаев конструктивного выполнения в виде частного дифференциального уравнения 8 порядка. Это уравнение полностью присваивает поведение конструкции и охватывает также до сих пор неучтенное влияние срезовой жесткости плиты.

Для первого случая конструктивного выполнения, т. й. для конструкции с нежесткими на кручение элементами жесткости, расположенными в одном направлении, дается решение однородного уравнения и установлено девять возможных случаев по типам корней биквадратного уравнения. Далее дано решение для равномерно нагруженной конструкций, для конструкции под полосовой нагрузкой и выведено прямое решение для общей нагрузки и для краевых условий, соответствующих просотму опиранию на двух краях и остальным двум свободным краям. Это прямое решение устранило большие трудности возникающие при выражении краевых условий многократными интегралами при решении подобных проблем, приведенных в литературе.

Дается также и решение третьего случая конструктивного выполнения т. е. конструкции с нежесткими на кручение элементами жесткости, расположенными в двух взаимно-перпендикулярных направлениях.

Для первого и четвертого случая конструктивного выполнения, т. е. для конструкции с жесткими на кручение элементами жесткости, расположенными в одном направлении и для конструкции с двумя системами взаимно-перпендикулярных элементов жесткости, из которых одна (продольные балки) сопротивляется кручению, а другая (поперечные балки) нежестка на кручение, решение полученных дифференциальных уравнений будет аналогическое двум предыдущим случаям и поэтому не разработано.

Фиг. 1. К методу Гуйон — Массоннета.

Фиг. 2. Оси координат, обозначение размеров и внутренних сил в рассматриваемой конструкции.

Фиг. 3. К определению изгибаемых моментов, поперечных и нормальных сил в сечениях конструкции с нежесткими на кручение элементами жесткости, расположенными в одном направлении.

Фиг. 4. К выводу уравнений равновесия сил в элементе конструкции.

Фиг. 5. К выводу уравнения равновесия моментов в элементе конструкции.

Фиг. 6. Обозначение размеров поперечного сечения.

Фиг. 7. Пластика с врезами, ширина которых стремится к нулю, как особенный случай рассматриваемой конструкции при $b_1 \rightarrow b_0$.

Фиг. 8. Конструкция с жесткими на кручение элементами жесткости, расположенными в одном направлении.

Фиг. 9. Поток касательных напряжений в элементе жесткости в следствие действия чистого сдвига в врезной изотропной плите.

- Фиг. 10. Поток касательных напряжений в элементе жесткости вызванный чистым сдвигом и кручением.
- Фиг. 11. Конструкция с жесткими на кручение элементами жесткости, расположенными в двух взаимно-перпендикулярных направлениях.
- Фиг. 12. Опирание и размеры рассматриваемой конструкции и система координат.
- Фиг. 13. Конструкция с двумя системами взаимно-перпендикулярных элементов жесткости, одна из которых (продольные балки) сопротивляется кручению, а другая (поперечные балки) нежестка на кручение.

Richard Bareš, Pavel Machan

LE CALCUL EXACT DES DALLES CONSTRUCTIVEMENT ORTHOTROPES

Notre époque moderne d'un développement technique précipité est caractérisée par son effort très pousse d'augmenter le pouvoir portant des pièces de portée, pour améliorer ainsi l'économie totale d'un oeuvre constructif.

Toutes les méthodes de calcul des constructions formées par deux systèmes de poutres en liaison raide avec une dalle, jusqu'ici connues ou ne respectent pas du tout l'effet de répartition des surcharges par la dalle, ou supposent simplement que la dalle aide aux entretoises dans la répartition transversale des surcharges, purement par sa raideur de flexion, éventuellement par sa raideur de torsion. Une telle supposition serait juste uniquement dans le cas, si l'écart des poutres était plus grand, ou au moins le même, que la largeur de collaboration en flexion de la dalle, dans le sens de sa longueur. Quand les poutres ont des distances plus petites, les efforts tangentiels horizontales peuvent se transmettre d'une poutre à l'autre par la dalle, sans égard à sa raideur en flexion ou en torsion. Aux effets connus de la répartition des surcharges par la raideur tangentielle de la dalle, arrive donc encore l'effet de répartition des surcharges par la raideur tangentielle de la dalle. Dans la suite nous dénommerons ce phénomène „l'effet en bloc“ pour le distinguer des autres effets (la raideur en flexion et en torsion) que nous indiquerons „l'effet de dalle“.

Le chapitre 2 et 3 est consacré aux méthodes connues jusqu'ici, leurs analyse et le tracement du problème. Une des modes des plus précises de calcul des constructions de poutres réunies avec une dalle, sont les méthodes qui font l'usage de l'application anisotropique, d'habitude d'une anisotropie orthogonale — d'une orthotropie. Le calcul représente en ce cas la solution de l'équation différentielle du 4e ordre de Huber. Les travaux de Guyon et de Massonet sont basés sur cette idée. Ce sont les travaux concernant le grillage de poutres. Dans le cas, quand les poutres sont liées sauf les entretoises avec une dalle, la solution exacte est plus complexe et le tracement de ce problème est donné par les travaux de Pfüger, qui concernent les parois portantes. Pour une construction qui se compose d'une dalle isotrope unie avec les poutres non-rigides en torsion, Trenks a présenté une étude intéressante, avec une analyse des effets particuliers. La tâche de cet article est l'exécution de la solution pour les dites constructions avec le maximum de précision non seulement quant au choix des suppositions mais surtout aussi quant au soin de saisir et de respecter tous les effets particuliers.

Chapitre 4 publie la désignation et les suppositions. Chapitre 5 s'occupe avec les constructions avec nervures unidirectionnelles, non raides en torsion.

Pour le calcul pratique on introduit dans ce chapitre les coefficients sans-dimensionnelles η et β . A l'égard des conditions d'appui, elles sont transformées seulement pour une inconnue, c'est-à-dire pour la flèche w .

Le chapitre 6 est consacré aux constructions avec nervures unidirectionnelles rigides en torsion.

Il y a ici la déduction des équations de cette construction et de ses conditions d'appui.

Dans le chapitre 7 on trouve des équations pour une construction avec poutres disposées dans les deux directions perpendiculaires, en torsion nonraides.

Le chapitre suivant donne les équations pour une construction, avec poutres de section tubulaire, rigides en torsion et les entretoises non-raides en torsion.

Enfin le chapitre 9 fait le conclusion, dans laquelle on explique par exemple les différents détails de solution des équations.

Ce travail est une préparation théorique de ce problème pour son traitement pratique, intentionnée en forme d'abaques ou en forme tabulaire, avec l'usage par exemple des calculateurs différentiels, analogues.

- Fig. 1. À la méthode de Guyon — Massonnet
 Fig. 2. Système coordonnées, dimensions et jeu des efforts de la construction envisagée.
 Fig. 3. Jeu des moments fléchissants, efforts tangentiels et efforts normaux d'un système avec des nervures sans raideur en torsion unidirectionnelles.
 Fig. 4. Jeu des forces d'un élément de la construction.
 Fig. 5. Jeu des moments d'un élément de la construction.
 Fig. 6. Schème de section transversale.
 Fig. 7. Dalle avec des incisions infinitesimales (cas de la construction envisagée pour $b_1 \rightarrow b_0$).
 Fig. 8. Schème d'une construction avec des nervures raides en torsion.
 Fig. 9. Flux tangentiel dans la nervure comme produit des efforts tangentiels dans la dalle isotrope supérieure.
 Fig. 10. Flux dans la nervure comme produit des efforts tangentiels et torsionels.
 Fig. 11. Schème d'une construction avec des nervures raides en torsion dans les deux directions.
 Fig. 12. Schème de la construction envisagée.
 Fig. 13. Schème d'une construction avec des nervures disposées dans les deux directions, les longerons étant raides, les traverses étant nonraides.

	Str.
1. Úvod	3
2. Dosavadní způsoby výpočtu	5
3. Rozbor dosavadních metod výpočtu a postavení problému	11
4. Označení a předpoklady	14
5. Konstrukce s výztuhami netuhými v kroucení, probíhajícími v jednom směru	16
5.1. Vnitřní síly	16
5.2. Výminky rovnováhy nezatíženého prvku a odvození diferenciálních rovnic	18
5.3. Bezrozměrné parametry β a η	21
5.4. Mezní případy	23
5.5. Řešení homogenní rovnice	25
5.6. Partikulární řešení	28
5.7. Obecné řešení	28
5.8. Rovnice obecně zatížené desky	29
5.9. Řešení pro konstrukci zatíženou rovnoměrně	29
5.10. Řešení pro konstrukci zatíženou přímkovým zatížením	31
5.11. Přímé řešení z rovnice (5.23)	32
5.11.1. Okrajové podmínky	32
5.11.2. Řešení rovnice (5.23)	38
6. Konstrukce s výztuhami tuhými v kroucení, probíhajícími v jednom směru	39
7. Konstrukce s výztuhami netuhými v kroucení, probíhajícími v obou směrech	45
7.1. Odvození diferenciálních rovnic	45
7.2. Okrajové podmínky konstrukce pro přímé řešení z rovnice (7.10)	47
8. Konstrukce s výztuhami probíhajícími v obou směrech, přičemž podélníky jsou tuhé a příčnický netuhé v kroucení	52
9. Závěr	54
Příloha I. Převodění tří parciálních diferenciálních rovnic (5.9), (5.10), (5.11) na jednu parciální diferenciální rovnici 8. řádu (5.23)	55
Příloha II. Řešení rovnice homogenní (5.38)	58
Příloha III. Odvození předpokladů oprávněného použití metody Filona pro řešení homogenní rovnice (5.38)	60
Příloha IV. Řešení bikvadratické rovnice (5.43)	64
Příloha V. Určení konstant $A_n - D_n$ rovnice (5.50) z okrajových podmínek daných vztahy (5.51)	67
Příloha VI. Určení konstant $A_n - D_n$ rovnice (5.50) pro izotropní desku přechodem z obecných vztahů daných v příloze V	73
Příloha VII. Důkaz totožnosti uvedeného řešení s obvyklým řešením podle diferenciální rovnice 4. řádu	76
Příloha VIII. Odvození okrajových podmínek pro nekonečný pás za přímkového zatížení ..	78
Literatura	82
Resumé	83

Autorům Rozprav ČSAV

Rozpravy Československé akademie věd vycházejí ve třech řadách: matematických a přírodních věd, technických věd a společenských věd. Do Rozprav se zařazují výhradně původní vědecké práce, které jsou výsledkem vlastní badatelské činnosti autorovy. Přednost mají práce v maximální míře odpovídající potřebám národního hospodářství a kultury a přispívající k rozvoji socialistické společnosti.

K otištění v Rozpravách se přijímají rukopisy o průměrném rozsahu 50–100 stran strojopisu (včetně literatury, textů pod obrázky, resumé apod.). Jen ve výjimečných případech lze přijmout rukopis 150 stran strojopisu.

Originál rukopisu má být zásadně napsán česky a je-li to odůvodněno, může být připojeno resumé v cizím jazyce. Rozsah resumé nesmí však překročit čtvrtinu rozsahu českého textu. Ve zvláštních případech lze vydat i cizojazyčně psaný originál s českým resumé.

Autor dodá kompletně vybavený rukopis se všemi přílohami redakci příslušného vědního oboru v Nakladatelství ČSAV, Vodičkova 40, Praha 1. Redakce zaznamená datum, kdy práce došla, a zajistí u příslušného vědeckého kolegia odborné posouzení díla. Jinak platí pro práce v Rozpravách tytéž směrnice a zásady jako pro ostatní neperiodické publikace vydávané Nakladatelstvím Československé akademie věd.

Úprava rukopisů

1. Rukopis pište na psacím stroji ob řádek, jen po jedné straně normalizovaného formátu papíru.
2. Je třeba, aby celý rukopis byl průběžně stránkovaný. Texty pod obrázky musí být očíslovány a napsány za sebou na listech, které budou dále stránkované a zařazeny mezi seznam literatury a resumé, jímž bude práce zakončena. Příslušnost jednotlivých textů pod obrázky musí být označena červenou tužkou jejich čísly na okraji stránek rukopisu takto: čísla obrázku v kroužku, čísla tabulek v trojúhelníku.
3. Je nutno, aby zvláštní sazba, pokud je jí nezbytně třeba, byla v rukopisu označena takto:
 - a) Latinská jména zvířat a rostlin (nikoliv jména autora druhu) podtrhněte vlnovkou, budou otištěna *kurzívou*.
 - b) Proložená slova podtrhněte čárkovaně.
 - c) Jména autorů, která mají být vysazena kapitálkami, podtrhněte čerchovaně.
 - d) Petič označte svislou čarou na okraji rukopisu s poznámkou „petič“.
 - e) Úprava matematických rukopisů se řídí normou ČSN 01 1001 a ČSN 880220.
4. Obrázky musí mít své průběžné číslování, shodující se s čísly jejich textů. Odkazy v textu na obrázky musí být důsledně provedeny již před odevzdáním rukopisu. Obrázky je třeba dodat rýsované tuží na kladívkovém nebo pauzovacím papíru. Popis obrázků buď na stroji (pokud je možno jej vysázet), nebo šablonkou č. 5, velikost obrázků 2 : 1, fotografie ostré a tvrdé.
5. V seznamu literatury se zaznamenávají jen citované práce, autoři se řadí podle abecedy, práce se postupně číslovají, za jménem autora (křestní jméno iniciálkami) a názvem práce se uvedou data v tomto pořadí: název časopisu nebo jeho uznaná zkratka, ročník (sešit): strana až strana, rok.

Na příklad:

1. EMERSON R. and LEWIS CH. M.: The dependence of the quantum yield of *Chlorella* photosynthesis on wave of light. Amer. journal of botany 30 (3) : 165–178, 1943.
2. MIČURIN I. V.: Principy a metody práce. Spisy I. Přel. L. Černý a spol. NČSAV, Praha 1953. U práce se udává titul i tehdy, jde-li o práci uveřejněnou v časopisu. V textu se cituje takto: Mičurin (1953).
6. Zároveň s rukopisem dodá autor stručnou charakteristiku díla (15–20 řádek), kde uvede obsah a hlavní vědecký a společenský význam práce a okruh čtenářů, kterým je práce určena.

Rozpravy Československé akademie věd

Ročník 72/1962. Řada TV, sešit 4. Vydává Nakladatelství Československé akademie věd, Vodičkova 40, Praha 1 — Nové Město, telefon 246241. Dodávací poštovní úřad 01. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky tuzemské i do zahraničí přijímá Poštovní novinový úřad, Jindřišská 14, Praha 1, Nové Město. Lze objednat i u každého poštovního úřadu, u poštovního doručovatele nebo přímo v Nakladatelství ČSAV.

Tiskne Knihkisk, n. p., závod 5

Redaktorka publikace Marie Moravcová

Tento sešit vyšel v prosinci 1962 — 4,28 AA — Náklad 1300 výtisků — A-09*21589

Cena brožovaného výtisku 5,70 Kčs

Tematická skupina 05/77

Knihy NČSAV

František Faltus: PRVKY OCELOVÝCH KONSTRUKCÍ

1962, 696 str., 662 obr., 3 str. příl., váz. Kčs 68,—.

V třetím opraveném a doplněném vydání knihy jsou shrnuty technologické a teoretické podklady potřebné pro navrhování ocelových konstrukcí nejvýznamnějších oborů, např. ocelové mosty, ocelové konstrukce pozemního a průmyslového stavitelství, vodní stavby apod. Kniha je vědeckým základem, na nějž navazují další speciální publikace, např. Ocelové konstrukce pozemního stavitelství.

František Faltus: OCELOVÉ KONSTRUKCE POZEMNÍHO STAVITELSTVÍ

1960, 576 str., 517 obr., váz. Kčs 47,50.

Publikace se zabývá návrhem a výpočtem ocelových konstrukcí užívaných v pozemním stavitelství. Její podstatná část je věnována ocelovým konstrukcím průmyslových hal, zejména halám s těžkými jeřáby, u nichž se nejvíce uplatňuje ocel. Uvedena jsou ekonomická řešení výstavních hal velkých rozpětí, sportovních arén apod. Zvláštní kapitoly jsou věnovány konstrukcím provizorním, rozebíracím, obytných, administrativních a veřejných budov.

Konrád Hruban: BETONOVÉ KONSTRUKCE

1959, Studie a prameny, 626 str., 440 obr., 90 obr. na kříd. příl., 10 tab., váz. Kčs 62,50.

Přehled nejdůležitějších nosných konstrukcí užívaných při stavbách všeho druhu. Autor postupně řeší nosné konstrukce budov, nosné plochy, konstrukce pro zvláštní účely, jako jsou visuté střešy, nádrže, vodojemy, chladič věže, komíny, potrubí, jezy, hráze apod.

Václav Dašek: STATIKA RÁMOVÝCH KONSTRUKCÍ

Studie a prameny sv. 22.

1959, 550 str., 250 obr., 11 tab., váz. Kčs 43,—.

Kniha pojednává o nejdůležitějších, v praxi užívaných metodách řešení rámových konstrukcí. Postupně objasňuje metodu silovou, deformační, metodu základních bodů, momentových ploch i metodu rozdělování sil a momentů. Řeší též přetvoření prutů přímých i zakřivených, konstrukci nosníků různých typů, vliv prostorového namáhání rovinných soustav a konstrukcí a nosníků na pružném podkladě.

Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1 - Nové Město, Vodičkova 40

Cena výtisku Kčs 5,70
05/77